Grygiel, W., Hohol, M., & Piechowicz, R. (2011). Zmetaforyzowana matematyka i zmatematyzowana metafora. Logos i ethos, 31(2), 147–168.

Zmatematyzowana metafora i zmetaforyzowana matematyka

Wojciech Grygiel, wgfssp@gmail.com
Mateusz Hohol, mateuszhohol@gmail.com
Robert Piechowicz, rpiechowicz@gmail.com

Wydział Filozoficzny Uniwersytetu Papieskiego Jana Pawła II w Krakowie
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

Kraków 2011

WPROWADZENIE

W powszechnym ujęciu matematyka uznawana jest za naukę pewną. Wyniki uzyskiwane przez matematyków traktowane są, jako bezwzględnie prawdziwe i niepodważalne. Dowolne twierdzenie, jeśli tylko posiada formalny dowód, nie podlega już dyskusji. Nic więc dziwnego, że matematyka traktowana jest jako wzór wiedzy. Co więcej, o szczególnym znaczeniu matematyki świadczy jej stosowalność w naukach przyrodniczych, a więc przydatność do opisu fizykalnego świata. Dopiero zastosowanie matematyki i eksperymentu pozwoliło na wypracowanie nowożytnego i aktualnego do dziś paradygmatu nauk przyrodniczych. Sam „cud" stosowalności matematyki do innych nauk jest bardzo ciekawym zagadnieniem, które doczekało się wielu różnych interpretacji filozoficznych[1]. Historia matematyki pokazuje jednak, iż tak wyidealizowany jej obraz daleki jest od rzeczywistości o czym świadczy chociażby do dziś nie rozwiązany kryzys w podstawach matematyki, wynikły u schyłku XIX wieku. Dyskusje w tym zakresie przybierają charakter filozoficzny, ponieważ koncentrują się wokół zagadnienia ontologicznego statusu obiektów matematycznych i wynikających z tego konsekwencji w uprawianiu matematyki. Aktywną wymianę zdań w tym

[1] Zob. E. P. Wigner, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki,* red. R. Murawski, Warszawa 2002, s. 293-309.

zakresie napotkać można nawet w gronie samych matematyków, której ciekawym przykładem jest dysksuja, która miała miejsce na łamach *European Mathematical Society Newsletter* w latach 2007-2009[2]. Ciekawym wnioskiem, który został w miarę powszechnie wyrażony jest przekonanie, iż rozwiązania zarysowanych problemów powinny pojawić się na niwie naukowej, a szczególnie w obrębie nauk kognitywnych. Stanowi to niewątpliwą zachętę, aby dalszych rozstrzygnięć w podstawach matematyki szukać w koncepcjach znaturalizowanych, traktujących wszelkie zjawiska mentalne, a w tym również formułowanie abstrakcyjnych pojęć matematycznych jako zależne od biologicznej struktury mózgu. Perspektywę taką stwarza opracowana przez G. Lakoffa i M. Johnsona teoria metafor, która, jak wskazują wstępne badania G. Lakoffa i R. Nuzeza, może okazać się istotnym narzędziem w dalszym wyjaśnianiu podstaw matematyki. W niniejszej publikacji zostaną zaprezentowane kluczowe tezy tak zarysowanego programu *ucieleśnionej matematyki* (ang. *embodied mathematics*), wraz z propozycjami ich lepszego ugruntowania oraz sformalizowania.

MATEMATYKA W UJĘCIU (NIEMAL) POWSZECHNYM

Trudno jest podać zbiór cech definicyjnych matematyki, takiej jak pojmuje ją większość ludzi. Na potrzeby niniejszej pracy, jako punkt wyjścia przyjmiemy cechy wyliczane przez Stanisława Krajewskiego[3]. Pierwsza z nich to *merytoryzm*. Jeśli tylko rozumiemy określony formalizm matematyczny i przekonani jesteśmy o jego sensowności nie potrzebujemy argumentów autorytetów, które potwierdziłyby lub obaliły nasz ogląd problemu. Za przykład przewagi *merytoryzmu* nad *autorytaryzmem* na gruncie matematyki uznać, można często powtarzane przez Michała Hellera stwierdzenie, że „równania bywają często mądrzejsze od ich twórców”. Drugą z cech jest *ahistoryzm*. Pogląd ten rozumieć można wielorako. Jedno ze znaczeń głosi, że matematyk, aby uprawiać naukę nie musi znać jej historii. Choć oczywiście pojęcia i reguły mają określone pochodzenie, a okoliczności ich powstania/odkrycia mogą być przydatne w pracy, znacznie istotniejsza wydaje się wyobraźnia i biegłość w przekształceniach formalnych. Z ahistoryzmem wiąże się kolejna wymieniana przez Krajewskiego cecha, jaką jest *bezkontekstowość*, czyli niezależność prawdy matematycznej od kontekstu historycznego, społecznego, politycznego, kulturowego itd. Co więcej, ważnym dla niniejszej pracy, a odrzucanym przez większość matematyków kontekstem jest cielesność,

[2] Obszerna relacja tej dyskusji została przedstawiona w: W. P. Grygiel, *Matematycy o platonizmie matematycznym*, „Logos i Ehtos”, 2(29), 2010, s. 7-26.
[3] Zob. S. Krajewski, *Czy matematyka jest nauką humanistyczną?*, Kraków 2011, s. 98-102.

stąd też następna cechą jest *odcieleśninie*. Podmiot uprawiający matematykę to nie człowiek „z krwi i kości”, ale przede wszystkim *umysł* niepoddający się ograniczeniom materialnym i społecznym. Stąd też na miejscu są określenia takie jak *czysty podmiot* czy *transcendentalne ego*. Inną wyznacznikiem rozumienia matematyki przez większość ludzi jest *osiągalność rozwiązań*. Celem działalności matematyka jest nie tyle lepsze zrozumienie problemów (jak ma to miejsce np. w tradycyjnej filozofii), ale raczej dążenie do ich rozwiązania i całkowitego usunięcia trudności. Możliwe jest to dzięki *formalizacji*, którą Krajewski wymienia, jako ostatnią z cech definicyjnych powszechnie rozumianej matematyki. Ideał ten jest bardzo stary, jego początków doszukiwać można się u Arystotelesa i w pierwszej znanej aksjomatyce geometrii, czyli w *Elementach* Euklidesa. Idea ta osiągnęła swój szczyt w XX wieku dzięki Hilbertowskiej koncepcji dowodu i systemu formalnego. Powyższy zbiór warto uzupełnić o jeszcze jedną cechę (albo raczej ją wyeksplikować). Jest nią *aprioryczność* matematyki. Powszechnie sądzi się, że matematyka jest niezależna od empirii zarówno w kontekście odkrycia, jak i w kontekście uzasadnienia, gdyż prawdziwość formuł matematycznych gwarantowana jest przez nie same.

Powyższe cechy łączone są bardzo często z przekonaniami filozoficznymi o rodowodzie platońskim. W warstwie ontologicznej oznacza to, że byty matematyczne charakteryzują się obiektywnym istnieniem, niezależnym od czasu, przestrzeni i umysłu, zaś w warstwie epistemologicznej, że nie są one tworzone, ale odkrywane przez matematyków. Platonicy matematyczni, tacy jak np. Roger Penrose[4], Michał Heller[5], przekonani są ponadto, że „cud” stosowalności matematyki do opisu świata fizycznego ma miejsce, dzięki własności Wszechświata, jaką jest jego *matematyczność*. Inaczej rzecz ujmując, platońsko rozumiana matematyka, jest bardziej fundamentalna niż rzeczywistość fizykalna. Platonicy matematyczni przekonani są często również, że znana dotychczas matematyka jest jedynie częścią matematyki transcendentnej[6]. Potoczne przekonania na temat matematyki, wspierane filozoficznymi poglądami o proweniencji platońskiej, określane są przez George’a Lakoffa i Rafaela Núñeza mianem *romantyzmu matematycznego* (*The Romance of Mathematics*)[7].

[4] Zob. R. Penrose i in., *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, przeł. P. Amsterdamski, red. M. Longair, Warszawa 1997, ss. 18-19.
[5] Zob. M. Heller, *Filozofia i Wszechświat*, Kraków 2006, ss. 48-57.
[6] Michał Heller pisze o *Matematyce* i *matematyce* (przez „M” i „m”), zaś Kurt Gödel o matematyce obiektywnej i matematyce subiektywnej.
[7] Zob. G. Lakoff, R. Núñez, *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*, New York 2000, s. XVn.

MATEMATYKA ODCIELEŚNIONA I UCIELEŚNIONA

Każdy, kto zajmował się na poważnie matematyką albo filozofią matematyki wie jednak, że wymienione wyżej cechy są co najmniej dyskusyjne i nie oddają całej prawdy o dyscyplinie. Przykładowo – jak zauważa Krajewski – na gruncie matematyki nie można wyeliminować całkiem argumentu z autorytetu (wiele ważkich dowodów znanych jest tylko nielicznym matematykom, a akceptuje je większość społeczności). Z dyskursu matematycznego – na co uwagę zwrócił po raz pierwszy wyraźnie Raymond Wilder – nie da się wyeliminować również kontekstu kulturowego[8]. Bywa tak, że matematycy prócz poszukiwania rozwiązań eliminujących problemy próbują je zrozumieć (np. definicja liczb rzeczywistych), zaś sama formalizacja to nie wszystko – konieczne jest stwierdzenie, czy w danym przypadku jest ona adekwatna. Związana jest z tym aktualna dziś problematyka stosowalności dowodów komputerowych w matematyce. Stosowanie komputerów jest w pewnym sensie sprzeczne z paradygmatem matematyki, jako nauki czysto apriorycznej, gdyż wprowadza do niej element eksperymentu empirycznego[9]. Koncepcja matematyki jako nauki *quasi*-empirycznej czy wręcz empirycznej (np. I. Lakatos, H. Putnam, W. v. O. Quine) jest dość dobrze zbadana, dlatego nie będziemy poświęcać jej więcej miejsca[10]. Istnieją wreszcie inne, konkurencyjne w stosunku do platonizmu stanowiska w filozofii matematyki, których także nie będziemy omawiać w niniejszej pracy[11]. Zamiast tego więcej miejsca poświęcimy negacji tezy na temat *odcieleśnienia* matematyki.

Zgodnie ze standardowym poglądem zarówno w uprawianiu matematyki, jak i w filozoficznej refleksji nad nią, można pominąć biologiczną stronę podmiotu matematycznego, czyli – nieco kolokwialnie ujmując – stwierdzenie, że „matematyk jest człowiekiem z krwi i kości". Naszym zdaniem jest zupełnie odwrotnie. Przyjęcie perspektywy *ucieleśnionej matematyki* (*embodied mathematics*) jest w zasadzie przypadkiem szczególnym przyjęcia *ucieleśnionego* umysłu. Paradygmat ten może naszym zdaniem przyczynić się do przezwyciężenia sporów toczących się od wielu stuleci w ramach filozofii matematyki. Podejście takie pozwoli pokazać, że niektóre z założeń *matematycznego romantyzmu* są zadane apriorycznie, i że ich

---

8 Zob. R. W. Wilder, *Kulturowa baza matematyki*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki,* red. R. Murawski, Warszawa 2002, s. 275-292.

9 Zob. T. Tymoczko, *Problem czterech barw i jego znaczenie filozoficzne*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki,* red. R. Murawski, Warszawa 2002, s. 310-340.

10 Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa 2001, s. 148-167.

11 Poszczególne stanowiska w kwestii podstaw matematyki oraz eksplikacja uwikłanych w nie apriorycznych założeń filozoficznych, będą przedmiotem dalszych publikacji. Póki co zainteresowanych czytelników odsyłamy do dostępnej literatury, zob. np. Z. Hajduk, *Zarys filozofii nauk formalnych*, Lublin 2011.

eliminacja wcale nie musi oznaczać zubożenia matematyki oraz braku możliwości jej stosowania w naukach empirycznych. Perspektywa, jaką przyjmujemy pisząc o *ucieleśnionej* matematyce ugruntowana jest w badaniach z zakresu nauk kognitywnych, a w szczególności w lingwistyce kognitywnej. W naszej pracy wspierać będziemy się osiągnięciami badań George'a Lakoffa i Rafaela Núñeza.

KOGNITYWISTYCZNA REFLEKSJA NAD MATEMATYKĄ – ZAŁOŻENIA

Teoria matematyki proponowana przez George'a Lakoffa i Rafaela Núñeza opiera się na trzech najważniejszych ich zdaniem „odkryciach" z zakresu kognitywistyki. Są to kolejno: (1) ucieleśnienie umysłu (*the embodiment of mind*), (2) kognitywna nieświadomość (*the cognitive unconscious*), oraz (3) metaforyczność myślenia (*metaphorical thought*)[12]. Można powiedzieć wręcz, że odkrycia te są podstawowymi aksjomatami współtworzone przez nich dyscypliny badawczej, określanej jako *cognitive science of mathematics*.

Pierwsze z „odkryć", czyli ucieleśnienie umysłu, nawiązuje do tzw. drugiego paradygmatu nauk kognitywnych. W paradygmacie pierwszym, który *de facto* związany jest z narodzinami kognitywistyki, stany mentalne definiowane były w kategoriach manipulowania symbolami. Dokonując pewnego uproszczenia powiedzieć można, że pierwszy paradygmat związany jest z przyjęciem obliczeniowej teorii umysłu („umysł ma się do mózgu tak, jak *software* do *hardware* komputera"). Ujęcie takie nastawione było głownie na praktyczne projekty z zakresu sztucznej inteligencji. O błędności obliczeniowej teorii umysłu przekonany był m.in. filozof John Searle. Poprzez słynny eksperyment myślowy „chińskiego pokoju" przekonywał on, że manipulacja symbolami według określonych reguł syntaktycznych nie może wygenerować semantyki (rozumienia)[13].

Jeśli chodzi zaś o drugi paradygmat kognitywistyki, podkreślający *ucieleśnienie umysłu* (*the embodiment of mind*), nacisk kładziony jest z jednej strony na neurobiologiczne podłoże stanów mentalnych, z drugiej zaś na interakcje, w jakie jednostka wchodzi z środowiskiem fizycznym, społecznym i kulturowym[14]. Dla ukształtowania się umysłu istotne są nie tylko

[12] Zob. G. Lakoff, R. Núñez, dz. cyt., s. 5n.
[13] Zob. J. R. Searle, *Umysły, mózgi i programy*, przeł. B. Chwedeńczuk, [w:] red. B. Chwedeńczuk, *Filozofia umysłu*, Warszawa: Spacja 1995, ss. 301-324.
[14] Zob. np. F. J. Varela, E. Thompson, E. Rosh, *The Embodied Mind*. *Cognitive Science and Human Development*, The MIT Press 1993.

czynniki zdeterminowane genetycznie (filogenetyczne), ale także doświadczenia nabywane w trakcie rozwoju osobniczego (czynniki ontogenetyczne). W procesie tworzenia pojęć – także matematycznych – istotną kwestią jest ukształtowana ewolucyjnie postawa, determinująca takie, a nie inne postrzeganie świata. Przykładowo, dużą rolę odgrywa, dwunożność oraz naturalna orientacja stron świata. Semantyka (znaczenie), której geneza była problematyczna na gruncie obliczeniowej teorii umysłu, w paradygmacie *ucieleśnionego umysłu* uzyskuje naturalistyczne wyjaśnienie, które sprowadzić można do oddziaływań, w jakie jednostka wchodzi z otoczeniem[15]. Choć odczuwane subiektywnie stany mentalne spowodowane są aktywnością sieci neuronowej, wzorce tej aktywności związane są z bodźcami, jakie mózg otrzymuje ze środowiska. Co za tym idzie, wzorców aktywności układu nerwowego, ani samych stanów mentalnych, nie można odseparować od obserwowalnych zachowań danego organizmu.

Drugie odkrycie, które Lakoff i Núñez uznają za fundamentalne, mówi, że wiele procesów kognitywnych pozostaje nieuświadomionych. Do procesów tych należą także rozumowania matematyczne. Choć nie wiemy dokładnie w jaki sposób mózg generuje świadome przeżycia, określane przez filozofów umysłu jako *qualia*, ani w jaki sposób powstaje samoświadomy podmiot, większość przedstawicieli nauk kognitywnych zgodna jest, że tylko niewielka część procesów, zachodzących na poziomie układu nerwowego uzyskuje swą mentalną reprezentację. „Odkrycie" nieświadomych procesów przypisać można już Zygmuntowi Freudowi, jednak dopiero współczesna neuronauka oraz obliczeniowe teorie umysłu wykazały, że intuicja ta była słuszna. Choć spór o algorytmiczność umysłu nie wydaje się rozstrzygnięty do dziś, komputerowa metafora umysłu, zgodnie z którą: „umysł ma się do mózgu tak, jak program (*software*) do struktury fizykalnej (*hardware*) komputera", okazała się bardzo płodna i pozwoliła na komputerowe modelowanie wielu procesów kognitywnych. Większość komputacyjnych kognitywistów i zwolenników *AI* zgadza się, że jeśli mózg jest faktycznie maszyną Turinga, wykonującą obliczenia, to funkcjonować musi on w reżimie równoległym. Oznacza to, że najprawdopodobniej w mózgu wykonywanych jest „naraz" (w jednym czasie) wiele różnych, nieraz konkurencyjnych, obliczeń. Na intuicyjnym poziomie sprzeczne jest to z powszechnymi poglądami na świadomość.

[15] Zob. M. Johnson, *The meaning of the body. Aesthetics of human understanding*, Chicago: Chicago University Press 2007.

Jeśli chodzi o subiektywne doświadczenie świadomości, choć filozofowie umysłu wyliczają wiele jego cech[16], najistotniejszymi wydają się *jedność* i *ciągłość*. Dzięki poczuciu ciągłości psychicznej, jesteśmy identyfikowani i sami identyfikujemy się, jako te same osoby w różnych momentach czasu (tożsamość diachroniczna). Filozofowie umysłu różnie rozwiązują problem sprzeczności między ciągłością świadomości i równoległym przetwarzaniem informacji w mózgu. Przykładowo Daniel Dennett twierdzi, że odczuwany subiektywnie strumień świadomości, jest memetycznym *software* zainstalowanym w biologicznym *hardware*[17]. Program świadomości, określany przez Dennetta, jako maszyna Joyce'a, działa sekwencyjnie, stąd subiektywne poczucie jedności i ciągłości. W języku teorii obliczeń powiedzieć można, że świadomość jest sekwencyjną maszyną Turinga, która realizowana jest przez maszynę równoległą. Taka konstrukcja teoretyczna *wręcz wymaga* istnienia stanów nieświadomych, tj. takich stanów równoległej maszyny Turinga, które nie są emulowane w maszynie sekwencyjnej. Jak zostało powiedziane, koncepcje ucieleśnionego umysłu oraz istnienia nieświadomych procesów mentalnych nie budzą obecnie większych kontrowersji wśród przedstawicieli nauk kognitywnych. Trzecim odkryciem, które pozwoliło sformułować Lakoffowi i Núñezowi teorię konceptualnych podstaw matematyki, jest metaforyczny charakter myślenia. Z racji swej istotności, odkrycie to domaga się omówienia w osobnym paragrafie.

SEMANTYKA PROTOTYPU, METAFORY I MATEMATYKA

Metodologiczny standard, obowiązujący od czasów Arystotelesa, wymagał aby wartościowa poznawczo aktywność istot ludzkich oparta była na rzetelnych predykcjach. Z kolei orzekanie czegoś o danym obiekcie wymaga przeprowadzenia adekwatnej jego kwalifikacji. Ta zaś dokonywana jest w oparciu o porównanie własności danego obiektu oraz cech konstytutywnych dla obiektów z danej kategorii. Jeżeli dany obiekt będzie posiadał wszystkie te własności, które cechują obiekty z danej kategorii, to może zostać do tej kategorii przypisany. Brak jakiejkolwiek z cech koniecznych wyklucza jego przynależność.

Równie prosta procedura pozwala wyodrębnić poszczególne kategorie. Mianowicie ich utworzenie wymaga wskazania zbioru wszystkich cech potencjalnych elementów kategorii,

[16] Zob. J. R. Searle, *Umysł. Krótkie wprowadzenie*, Poznań 2010, s. 138-148.
[17] Zob. D. Dennett, *Consciousness Explained*, Boston 1991.

które będą traktowane jako istotne[18]. Wykonalność tego zabiegu jest konsekwencją binarności cech. Otóż – zgodnie z prawami niesprzeczności i wyłączonego środka – dowolny obiekt posiada daną cechę albo jej nie posiada. Dlatego też przynależność obiektu do kategorii może zostać jednoznacznie rozstrzygnięta. Innymi słowy, kategorie mają ostre granice związane z reżimem logiki klasycznej. Skoro zaś przynależność do kategorii jest niestopniowalna, to każda z nich jest niezależna od reprezentanta.

Ten dość atrakcyjny model poznawczych interakcji ze światem szczególnie przypadł do gustu językoznawcom (np. Noamowi Chomsky'emu). Wykorzystując go w swoich badaniach rozbudowali oni jednocześnie arystotelesowską charakterystykę, wskazując że cechy są także: pierwotne, uniwersalne, abstrakcyjne i wrodzone. Jednakże model ten ani w swojej podstawowej wersji ani też w wersji rozbudowanej dla potrzeb fonologii nie wyjaśniał kilku istotnych fenomenów językowych, takich jak terminologia dotycząca barw czy też wieloznaczność. Co więcej słynne rozważania Wittgensteina dotyczące słowa „gra" sugerowały, że należy uważniej przyjrzeć się tradycyjnemu modelowi kategoryzacji:

> § 66 Przypatrz się np. kiedyś temu, co nazywamy „grami". Chodzi mi tu o gry typu szachów, gry w karty, w piłkę, gry sportowe itd. Co jest im wszystkim wspólne? – Nie mów: „*Muszą* mieć coś wspólnego, bo inaczej nie nazywałyby się 'grami'" – tylko *patrz*, czy mają coś wspólnego. – Gdy im się bowiem przypatrzysz, to nie dojrzysz wprawdzie niczego, co byłoby *wszystkim* wspólne, dostrzeżesz natomiast podobieństwa, pokrewieństwa – i to cały ich szereg. A więc się rzekło: nie myśl, lecz patrz! – Spójrz np. na gry typu szachów z ich rozmaitymi pokrewieństwami. Przejdź następnie do gier w karty: znajdziesz tu wiele odpowiedników tamtej klasy, ale też wiele rysów wspólnych znika, a pojawiają się inne. Gdy przechodzimy teraz do gier w piłkę, to niektóre cechy wspólne się zachowują, a wiele z nich się zatraca. (…). W wynik tych rozważań brzmi: Widzimy skomplikowaną siatkę zachodzących na siebie i krzyżujących się podobieństw; podobieństw w skali dużej i małej"[19].

I dalej:

[18] Por. J. Taylor, *Kategoryzacja w języku: prototypy w teorii językoznawcze*, przeł. A. Skucińska, Kraków 2001
[19] L. Wittgenstein, *Dociekania filozoficzne*, przeł. B. Wolniewicz, Warszawa: PWN 2008, s. 50-51.

§ 67 „Podobieństw tych nie potrafię scharakteryzować lepiej niż jako „podobieństw rodzinnych", gdyż tak właśnie splatają się i krzyżują rozmaite podobieństwa członków jednej rodziny: wzrost, rysy twarzy, kolor oczu, chód, temperament itd., itd. (…)[20].

Intuicje Wittgensteina zostały potwierdzone zostały w badaniach z zakresu lingwistyki i psychologii kognitywnej, przeprowadzonych przez Williama Labova oraz Eleanor Rosch[21]. Wnioski z wyników wspomnianych badań, będące podstawą semantyki prototypów, są następujące. Po pierwsze, *cechy nie są abstrakcyjne*, to znaczy reprezentują dostrzegalne zjawiska w otaczającym nas świecie. Ich identyfikacja nie jest jedynie intelektualnym wyzwaniem, ale wymaga kontaktu z empirią. W konsekwencji, po drugie, *cechy są wyróżniane ze względu na ich wyrazistość percepcyjną, funkcjonalną lub interakcyjną*. Innymi słowy, za charakterystyczne uważane są te cechy, które zostały wyróżnione bądź ze względu na szczególną interakcję z narządami zmysłów, bądź też ze względu na cel użycia posiadającego je obiektu, bądź też z uwagi na sposób jego użycia.

Po trzecie, skoro – jak wskazano – wyodrębnienie cech ma podstawę empiryczną, to *procedury poznawcze mające na celu porządkowanie danych nie mogą być oparte na identyfikacji cech koniecznych i wystarczających*. Jednak nie jest to działanie całkowicie dowolne. Otóż, pierwszy jego etap polega na ustaleniu jakiegoś poziomu intensyfikacji interesujących cech. Następnie poziom ten będzie stanowić podstawę do porównania na ile własności danego obiektu odpowiadają ustalonemu optimum. Ostatecznie dowolny obiekt będzie kwalifikowany w oparciu o stopień jego podobieństwa do prototypu, wyróżnionego na podstawie nasilenia cech.

Oczywiście może się zdarzyć, że jakiś obiekt pod pewnymi względami będzie podobny do jednego a pod innymi do drugiego wzorca. Zatem, po czwarte, *nie należy postulować, że istnieją takie cechy, które pozwalają na ścisłe dystynkcje kategorialne*. Jednak mimo tego, że zabiegi konceptualizacyjne nie prowadzą do wyłonienia cech istotnych, to istnieje tak zwany podstawowy poziom kategoryzacji, który umożliwia zrealizowanie dwóch zadań. Mianowicie na tym poziomie tworzone są percepcyjne i funkcjonalne gestalty, to znaczy pojęciowe

[20] Tamże, s. 51.
[21] Zob. E. H. Rosch, *Human categorization*, [w:] *Advances in Cross-Cultural Psychology*, t.1, red. N. Warren, New York: Academic Prss 1977, s. 1-72.

odpowiedniki dostępnych nam poznawczo i działaniowo obiektów. Jednak liczba informacji dotycząca tych obiektów jest zredukowana do niezbędnego minimum.

Pojęcia prototypowe mają kilka zasadniczych źródeł. Jednym z nich są kierunki w przestrzeni, które zostały wyróżnione przez George'a Lakoffa i Marka Johnsona jako podstawowe źródło metafor, czyli 'sposobu pojmowania jednego zjawiska w oparciu o pojęcia odnoszące się do innego'. Takie określenie mogłoby mieścić się w tradycyjnych kanonach pojmowania metafory, jednakże według Lakoffa i Johnson „cały system pojęciowy w ramach którego myślimy i działamy jest z natury metaforyczny"[22]. Innymi słowy *metaforyczność nie jest wyjątkowym, lecz typowym zjawiskiem w języku*. Co więcej, *metafory nie mają charakteru językowego, lecz pojęciowy*.

Rekonstrukcja ludzkiego systemu konceptualizacyjnego nie jest jednak zadaniem łatwym, gdyż podpada on pod wiedzę proceduralną. Posługiwanie się nim jest w takiej samej mierze bezproblemowe, jak i nieuświadomione. Jedynym sposobem dotarcia do pojęć, które stanowią fundament aktywności językowej i pozajęzykowej jest zbadanie tego, jak ludzie się komunikują. Świadectwo językowe, które przebadali Lakoff i Johnson, pozwoliło im skonstatować, że *metafory funkcjonują w sposób systematyczny*, czyli odwzorowanie „elementów z dziedziny pojęciowej w elementy innej dotyczy nie tylko obiektów oraz cech charakterystycznych dla dziedziny ale także relacji, zdarzeń i scenariuszy, które charakteryzują dziedzinę"[23]. Dzięki temu metafory nie są jednorazowymi fenomenami o charakterze językowym. Przeciwnie, pozwalają one systematycznie pojmować jeden fragment świata za pomocą innego.

Jak piszą Lakoff i Johnson: „Jednakże pozwalając nam skupić się na jednym z aspektów pojęcia, metafory mogą także pozostawić poza naszym zainteresowaniem inny jego aspekt, niespójny z metaforą"[24]. Odwzorowanie wyjściowej dziedziny pojęciowej na docelową, poddawaną konceptualizacji nie jest dokonywane *en bloc*. Niektóre aspekty dziedziny docelowej mogą zostać pominięte lub zniekształcone. Nie prowadzi to jednak ani do metafor przypadkowych, zrozumiałych jedynie dla jej twórcy, ani też do metafor bezwartościowych poznawczo ze względu na zbyt duże uproszczenia dziedziny docelowej, gdyż każda metafora

[22] Zob. G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, przeł. T. P. Krzeszowski, Warszawa 2010.
[23] Tamże, s. 11.
[24] Tamże, s.14.

spełniać musi zasadę niezmienniczości, głoszącą że „odwzorowania metaforyczne zachowują poznawczą topologię (tj. strukturę wyobrażeniową) dziedziny wyjściowej zgodnie ze strukturą dziedziny docelowej”[25]. A zatem *metafory nie zmieniają porządku właściwego dziedzinie, jej elementów wyróżnionych czy też statusu ontologicznego poszczególnych składowych dziedziny*. Teoria metafor, traktowanych jako narzędzia konceptualizacji i nośniki znaczeń, zastosowana została przez Lakoffa do różnych dziedzin aktywności ludzkiej. Jedną z nich stała się matematyka.

MATEMATYKA ZMETAFORYZOWANA

Po tym dość długim, ale jak się wydaje niezbędnym, wprowadzeniu przejść można do zasadniczej propozycji konceptualnych podstaw matematyki, jaką w książce *Where mathematics comes from* (dalej korzystamy niekiedy ze skrótu WMCF) przedstawił George Lakoff we współpracy z psychologiem i kognitywistą Rafaelem Núñezem. Nie jest celem niniejszego opracowania streszczanie długiej i dość szczegółowej argumentacji, w ramach której zrekonstruowali oni wiele zagadnień z zakresu różnych działów matematyki[26], a jedynie przedstawienie zarysu ich metody. Punktem wyjścia ich analiz jest przedstawienie wyników badań psychologicznych i neurologicznych (Antell, Keating, Wynn, Dehaene i in.) zgodnie z którymi podstawowe zdolności numeryczne i arytmetyczne są wrodzone i podlegają rozwojowi u małych dzieci[27]. Przykładowo, twierdzą oni, że dzieci już trzy, cztery dni po urodzeniu potrafią rozróżniać obserwowane zbiory dwu i trzyelementowe. Około półroczne dzieci potrafią dodawać i odejmować do trzech, i co ważne zdają sobie sprawę z odwracalności tych działań. Istotną kwestią jest również fakt, że podstawowe zdolności numeryczne nie ograniczają się tylko do percepcji wizualnej, ale również do rozróżniania dźwięków i sylab. Siedmiomiesięczne dzieci bez większych problemów zauważają ekwiwalencję pomiędzy liczbą usłyszanych uderzeń bębna a liczbami[28]. Istotną rolę w tworzeniu mentalnych reprezentacji liczb odgrywają struktury neuronowe zlokalizowane w dolnej korze ciemieniowej (*inferior parietal cortex*), a w szczególności w zakręcie kontowym (*angular gyrus*). Badania na które powołują się Lakoff i Núñez świadczą o tym, że zdolności takie jak, percepcja bardzo prostych relacji arytmetycznych, szacowanie liczebności i

[25] J. E. Grady, „Metaphor”, [w:] D. Geeraerts, H. Cuyckens, *The Oxford Handbook od Cognitive Linguistics*, Oxford University Press, Oxford 2007, s. 191.
[26] Szczegóły argumentacji Lakoffa i Núñeza oraz sam sposób rekonstrukcji teorii matematycznych w oparciu o teorię metaphor będą przedmiotem kolejnych publikacji.
[27] Zob. G. Lakoff, R. Núñez, dz. cyt., s. 15-26.
[28] Zob. tamże, s. 16.

dostrzeganie podobieństwa zbiorów, a także umiejętność posługiwania się symbolami czy też zapamiętywania wyników prostych obliczeń są wrodzone i można wskazać ich psychologiczną, a także neurobiologiczną bazę. Zasadniczą zagadką jest natomiast pytanie *jak* na bazie tak prymitywnych zdolności numerycznych nadbudowane są bogate teorie matematyczne, w których wykorzystywane są choćby takie pojęcia jak *nieskończoność*.

Zdaniem Lakoffa i Núñeza, aby odpowiedzieć na powyższe pytanie konieczne jest przyjęcie prezentowanych wyżej założeń: *ucieleśnionego umysłu*, *kognitywnej nieświadomości* oraz *metaforyczności myślenia*. Przyjmując te założenia, twierdzą oni, że rozumowania wykorzystywane w matematyce nie są specyficznymi zdolnościami, ale podlegają tym samym mechanizmom kognitywnym, które odpowiedzialne są za wszystkie operacje na pojęciach. Przykładowo Lakoff i Núñez twierdzą, że konceptualizacja pochodnej wymaga wykorzystania potocznych pojęć, takich jak ruch i zbliżanie się do granicy[29]. Ich zdaniem istotnymi dla rozumowań matematycznych mechanizmami są m.in. omawiane wyżej metafory pojęciowe (*conceptual metaphors*). Tworzenie bogatszych struktur pojęciowych, w tym także struktur matematycznych, możliwe jest dzięki amalgamatom pojęciowym (*conceptual blends*), które są kombinacjami różnych prostszych struktur. Intencją Lakoffa i Núñeza jest przedstawienie matematyki, a właściwie poszczególnych jej działów, jako struktur metafor, przy czym struktury te są kognitywnie pierwotniejsze niż struktury matematyczne. Istotną rolę odgrywa tu założenie, zgodnie z którym większość procesów kognitywnych przebiega poza świadomością podmiotu. Najczęściej ich argumentacja polega na wskazywaniu przykładów, dlatego też w taki sposób najłatwiej jest zaprezentować teorię.

Jedna z metafor istotnych dla konstrukcji logiki klasycznej określana jest jako **kategorie to pojemniki** (*categories are containers*). Jak w przypadku każdej metafory, wskazać można dziedzinę źródłową – w tym wypadku są to **pojemniki**, a więc coś *konkretnego* oraz dziedzinę docelową – w tym wypadku **kategorie**, będące obiektami abstrakcyjnymi. Działanie metafory polega na mapowaniu, czyli przekształcaniu elementu dziedziny źródłowej na element dziedziny docelowej[30]. Metafora **kategorie to pojemniki** pozwala na skonstruowanie zasad logiki klasycznej takich, jak prawa *sylogizmu hipotetycznego* czy też

[29] Tamże, s. 28-29.
[30] Tamże, s. 43.

modus tollens[31]. Korzystając z innej metafory (**stany to lokalizacje**) możliwe jest natomiast wygenerowanie spójników logicznych.

Mimo tego, że jak powiedziano wcześniej, prymitywne zdolności numeryczne i arytmetyczne są wrodzone, aby wytłumaczyć posługiwanie się przez ludzi bogatszą arytmetyką, konieczne jest odwołanie się do innych zdolności poznawczych, wykształconych w toku ewolucji. Zdaniem Lakoffa i Núñeza, aby mogła pojawić się zdolność do liczenia (choćby na palcach) konieczne są zdolności do: *grupowania*, *porządkowania*, *łączenia w pary*, *zapamiętywania*, *rozpoznawania ile obiektów pozostało do odliczenia*, *postrzegania niezależności porządku w jakim obiekty zostały zliczone od wyniku*, *łączenia obiektów z różnych grup w większe grypy*, a także *symbolizacji*, czyli przedstawiania abstrakcyjnych bytów, takich jak liczby przy pomocy fizycznych symboli, takich jak słowa[32]. Dzięki tym zdolnością wyniki uzyskanych obliczeń cechują się stabilnością – są powtarzalne. W połączeniu z odpowiednimi metaforami oraz ich amalgamatami, możliwe jest posługiwanie się bardziej zaawanasowanymi zdolnościami arytmetycznymi. Istotna rolę w charakteryzowaniu pojęć matematycznych odgrywają dwa typy metafor pojęciowych. Pierwsze z nich to oparte na doświadczeniu potocznym *metafory podstawowe* (*grounding metaphors*). Pozwalają one na tworzenie abstrakcyjnych pojęć takich jak np. *dodawanie*. Drugi typ metafor to *metafory spinające* (*linking metaphors*). Dzięki nim możliwe generowanie bardziej wyrafinowanych pojęć poprzez łączenie pojęć z różnych działów matematyki[33]. W niniejszej prezentacji ograniczamy się w zasadzie tylko do pierwszego typu metafor, gdyż pozwalają one na wygenerowanie działów, takich jak arytmetyka licz naturalnych. Zdaniem Lakoffa i Núñeza fundamentalną w tej kwestii jest przyswajana już w bardzo młodym wieku metafora **arytmetyka to kolekcja obiektów**. Przy pomocy tej metafory obiekty fizyczne mapowane są jako liczby[34]. Aby jednak w terminach teorii metafor skonstruować mnożenie oraz dzielenie konieczne jest wskazanie dodatkowych, bardzie złożonych, zdolności konceptualnych. Mnożenie konceptualizowane może być dwojako: jako *zbieranie* elementów lub jako *powtarzanie operacji dodawania*. Podobnie dzielenie konceptualizowane może być jako *podział* lub jako *powtarzanie operacji odejmowania*. Zdaniem Lakoffa i Núñeza arytmetyka ma charakter metaforyczny, zaś odkryty przez nich system metafor pozwala zrekonstruować *całość* tego działu (łącznie z własnościami, takimi jak przemienność mnożenia). W kognitywistycznym podejściu do

[31] Tamże, s. 44.
[32] Zob. tamże, s. 51n.
[33] Zob. tamże, s. 53.
[34] Tamże, s. 55n.

arytmetyki szczególnie istotna wydaje się również inna metafora, określana jako **arytmetyka to poruszanie się wzdłuż ścieżki** (*Arithmetic As Motion Along the Path*). Punktem wyjścia dla tej metafory jest fizyczne doświadczenie poruszania się z jednego miejsca do drugiego wzdłuż określonej trajektorii[35].

Powyżej zaprezentowany został tylko wycinek metaforycznego systemu pojęciowego przedstawionego w WMCF. Naszym celem było tylko zobrazowanie *metody* jaką posługują się Lakoff i Núñez rekonstruując arytmetykę. Wykorzystując inne zestawy metafor rekonstruują oni również inne działy, takie jak logika, algebra oraz teoria mnogości[36], czy też analiza matematyczna[37]. Co istotne ich teoria podejmuje również problem nieskończoności[38]. Szczegółowa analiza rekonstrukcji poszczególnych teorii matematycznych w oparciu o teorię metafor będzie przedmiotem kolejnych publikacji.

UCIELEŚNIONA MATEMATYKA

Na początku niniejszego opracowania przedstawiony zostały potoczne poglądy na temat matematyki. Choć oczywiście platonizm matematyczny nie jest jedyną filozofią matematyki, wpisuje się on w potoczne poglądy, które Lakoff i Núñez określają jako matematyczny romans. Istnieje wiele argumentów przeciw platonizmowi matematycznemu, a także wiele zalet realistycznej interpretacji matematyki. Z punktu widzenia epistemologii i nauk kognitywnych, największym problemem jest wyjaśnienie związku pomiędzy organizmami biologicznymi, jakimi są matematycy oraz abstrakcyjnymi bytami matematycznymi. W świetle kauzalnej teorii wiedzy Alvina Goldmana, warunkiem koniecznym zdobycia wiedzy na temat danego zjawiska, jest istnienie związku przyczynowego pomiędzy poznającym podmiotem a zjawiskiem. Paul Benacerraf zwrócił uwagę, że brak związku przyczynowego pomiędzy matematykami a obiektami abstrakcyjnymi wyklucza możliwość zaistnienia wiedzy matematycznej[39]. Teorie, takie jak *matematyka ucieleśniona* mają niewątpliwą przewagę nad platonizmem, gdyż matematyka sprowadzalna jest w nich do czynności kognitywnych podmiotu. Podstawową zaletą platonizmu matematycznego jest natomiast

[35] Tamże, s. 72.
[36] Zob. tamże, s. 107-152.
[37] Zob. tamże, s. 259-334.
[38] Zob. tamże, s. 153-255.
[39] Problematyka ta dyskutowana była szerzej w artykule W. P. Grygiel, M. Hohol, *Teoriopoznawcze i kognitywistyczne wyzwania matematycznego platonizmu*, „Logos i Ethos”, nr 2(27), 2009, s. 25-42.

dostarczenie wyjaśnienia dla fenomenu stosowalności matematyki w opisie świata przyrody[40]. Paradygmat matematyki ucieleśnionej zaprzecza natomiast platońskiemu postulatowi ontologicznej uprzedniości struktur matematycznych wobec rzeczywistości fizykalnej. Według Lakoffa i Núñeza matematyka jest stosowalna do opisu świata, gdyż zdolności kognitywne, dzięki którym powstała wyewoluowały, jako adaptacje stanowiące odpowiedź na wymagania stawiane przez środowisko.

Podstawowe roszczenia teorii ucieleśnionej matematyki eksplikowane w WMCF to: (1) stwierdzenie, że jedyna matematyką jaką znamy (i jaką możemy poznać) istnieje w ucieleśnionym umyśle; (2) stwierdzenie, że wszystkie treści matematyczne zawarte są w pojęciach ucieleśnionej matematyki oraz (3) stwierdzenie, że znakomita większość koncepcji matematycznych ma naturę metaforyczną[41]. Nieco rozwijając te założenia, obraz jaki wyłania się z WMCF jest naturalistyczny. Uprawianie matematyki jest naturalną czynnością poznawczą, która ugruntowana jest w funkcjonowaniu układu nerwowego oraz interakcjach w jakie ludzie wchodzą na co dzień ze środowiskiem[42]. Co za tym idzie odpowiednim narzędziem do badania konceptualnych podstaw matematyki są nauki kognitywne. Także problem stosowalności matematyki w naukach staje się zagadnieniem kognitywistycznym. Nie powoduje to jednak – jak się wydaje – relatywizacji matematyki. Ze względu na podobne dziedzictwo biologiczne, ludzkie zdolności kognitywne, a w tym zdolności matematyczne są zbliżone, dzięki czemu możliwe jest intersubiektywne tło dyskusji.

Jak już wspomniano metafory mają charakter odwzorowania pewnej opanowanej pojęciowo dziedziny (traktowanej jako wyjściowa) na ten fragment świata, który poddawany jest konceptualizacji (czyli na dziedzinę docelową). Co więcej odwzorowanie to ma zachowywać w dziedzinie docelowej te cechy strukturalne, które są właśnie dziedzinie wyjściowej. Aktualnie w literaturze przedmiotu mówi się o niezmienniczości topologii względem odwzorowań metaforycznych[43]. Temat ten – jako cokolwiek wykraczający poza niniejszy artykuł – zostanie dokładniej omówiony w kolejnej publikacji. Tymczasowo postaramy się

[40] Zob. różne prace Rogera Penrose'a i Michała Hellera, takie jak: R. Penrose i in., *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, przeł. P. Amsterdamski, red. M. Longair, Warszawa 1997; M. Heller, *Filozofia i Wszechświat*, Kraków 2006.
[41] Zob. G. Lakoff, R. Núñez, dz. cyt., s. 364.
[42] Zob. tamże, s. 377-379.
[43] Zob. J. E. Grady, „Metaphor", s. 190-192, G. Lakoff, „The invariance hypothesis: Is abstract reason based on imageschemas?", *Cognitive Linguistics*, s. 39–74, 1, 1990.

jedynie wskazać na istotną cechę odwzorowań metaforycznych, mianowicie ich *asymetrię*. W dyskutowanej powyżej metaforze **kategorie to pojemniki**, przenoszone są pojęcia dotyczące obiektów zlokalizowanych w pewnych rejonach przestrzeni na abstrakcyjne elementy należące do jakichś zbiorów. Ta metafora pozwala nam wyrazić istotne cechy kategorii (np. niepustość) oraz relacje pomiędzy nimi (tj. zawieranie). Innymi słowy, predykcje dotyczące pojemników stosują się do kategorii. Odwrotna zależność jednak nie zachodzi. Nieproblematyczna dla kategorii własność pustego spełniania nie stosuje się bowiem do pojemników, gdyż związane z takimi zdaniami presupozycje okazują się sprzeczne.

PYTANIA, PROBLEMY, DALSZE PERSPEKTYWY

W niniejszym opracowaniu zaprezentowana została perspektywa nowatorskiego spojrzenia na bardziej fundamentalne wyjaśnienie podstaw matematyki, niż ma to miejsce w ramach klasycznych stanowisk w filozofii matematyki takich, jak platonizm, intuicjonizm/konceptualizm czy też formalizm. Nie są one bowiem wolne od wielu ukrytych, apriorycznych założeń. Praktyka współczesnych matematyków a także fizyków teoretyków pokazuje, iż stanowiska te a także ich ścisłe konsekwencje nie są w dużej mierze respektowane, a matematyka powszechnie uprawiana jest w swojej „bogatszej” wersji, dopuszczającej m. in. przeprowadzanie dowodów niekonstruktywnych czy też akceptujące aksjomat wyboru. Nie da się ukryć, iż z punktu widzenia filozofii matematyki faworyzuje to platonizm. W takim ujęciu przyjęcie stanowiska platońskiego ma jedynie charakter metodologiczny i zostało przez C. Chiharę określone mianem *platonizmu mitologicznego*[44]. Tym bardziej więc sensownym wydało się sięgnięcie do narzędzi, umożliwiających głębsze wniknięcie w zagadnienie podstaw matematyki z wykorzystaniem osiągnięć nauk kognitywnych, realizujących się szczególnie obecnie w paradygmacie *ucieleśnionego umysłu*. Warto zauważyć, iż podejście takie dosyć radykalnie odbiega od wszelkich ujęć dualistycznych, tkwiących u podłoża klasycznych koncepcji matematyki i stanowi preludium do paradygmatu *matematyki ucieleśnionej*.

Z lektury zaprezentowanego opracowania niewątpliwie przeziera zachwyt teorią metafor G. Lakoffa i M. Johnsona, szczególnie w jej zastosowaniu do podstaw matematyki. Trudno to ukrywać, ponieważ narzędzie to rokuje istotne szanse ukazania głębszej perspektywy wielu

[44] Zob. C. Chihara, *Ontology and the Vicious Circle Principle*, New York 1973.

nierozstrzygniętych problemów filozoficznych, w które uwikłana jest matematyka. Zanim to jednak nastąpi, nie sposób pominąć szeregu ważnych i de facto nie podjętych w oryginalnym sformułowaniu teorii metafor kwestii. Przede wszystkim rodzi się pytanie o to, jak uzasadnić dokonanie w WMCF takiego a nie innego zbioru metafor. Lakoff i Nuzez zdają się traktować to zagadnienie jako wyjściowe, odwołując się jedynie bardzo enigmatycznie to prawdopodobnych źródeł postulowanych metafor bazowych. Można więc w tyk kontekście podjąć kwestię, czy proponowany zbiór metafor jest rzeczywiście nieredukowalny, to znaczy czy metafor tych nie można rozłożyć na bardziej pierwotne. Nasuwa się tutaj analogia z algebry linowej, dotycząca *liniowej niezależności* wektorów bazowych, rozpinających przestrzeń. Problem takiego rozkładu jest de facto problemem *kosmologicznym*, ponieważ jeśli potraktuje się ewolucję człowieka a wraz z nim jego władz poznawczych jako swoistą nić ewolucji Wszechświata, to należy oczekiwać, iż władze te wyewoluowały w takim kierunku, aby zapewnić odpowiednią adaptację do przetrwania na określonym poziomie rzeczywistości. Sensowne w takim ujęciu stają się więc wszelkie metafory związane z opisem przestrzennym, zwane przez Lakoffa i Johnsona *metaforami orientacyjnymi*[45]. Za nieredukowalnym charakterem tych metafor przemawia fakt, iż jednym z fundamentalnych pojęć najogólniejszej teorii czasoprzestrzeni – ogólnej teorii względności - jest pojęcie *metryki*, czyli, mówiąc potocznie, reguły na określanie odległości. Istnieje również niebezpieczeństwo, iż teoria metafor stanie się narzędziem tak ogólnym, iż radykalnie obniży się jej zdolność eksplanacyjna do poziomu, jaki obserwuje się chociażby w przypadku arystotelesowskiego hylemorfizmu. Stąd też konieczność przeprowadzenia zabiegów formalizacyjnych, pozwalających przeze wszystkim na wyakcentowanie *asymetrycznego* charakteru metaforycznych odwzorowań, warunkującego powstawanie nowej wiedzy i pogłębianie zrozumienia, a nie tylko transferu struktur elementarnych doświadczeń, z których metafory biorą swoje źródło. Pomimo wniesionych zastrzeżeń, można oczekiwać, iż taka perspektywa badawcza okaże się owocna w precyzyjniejszym naświetleniu procesów konceptualizacyjnch, przebiegających w ludzkim umyśle.

[45] G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, dz. cyt., ss. 41-49.