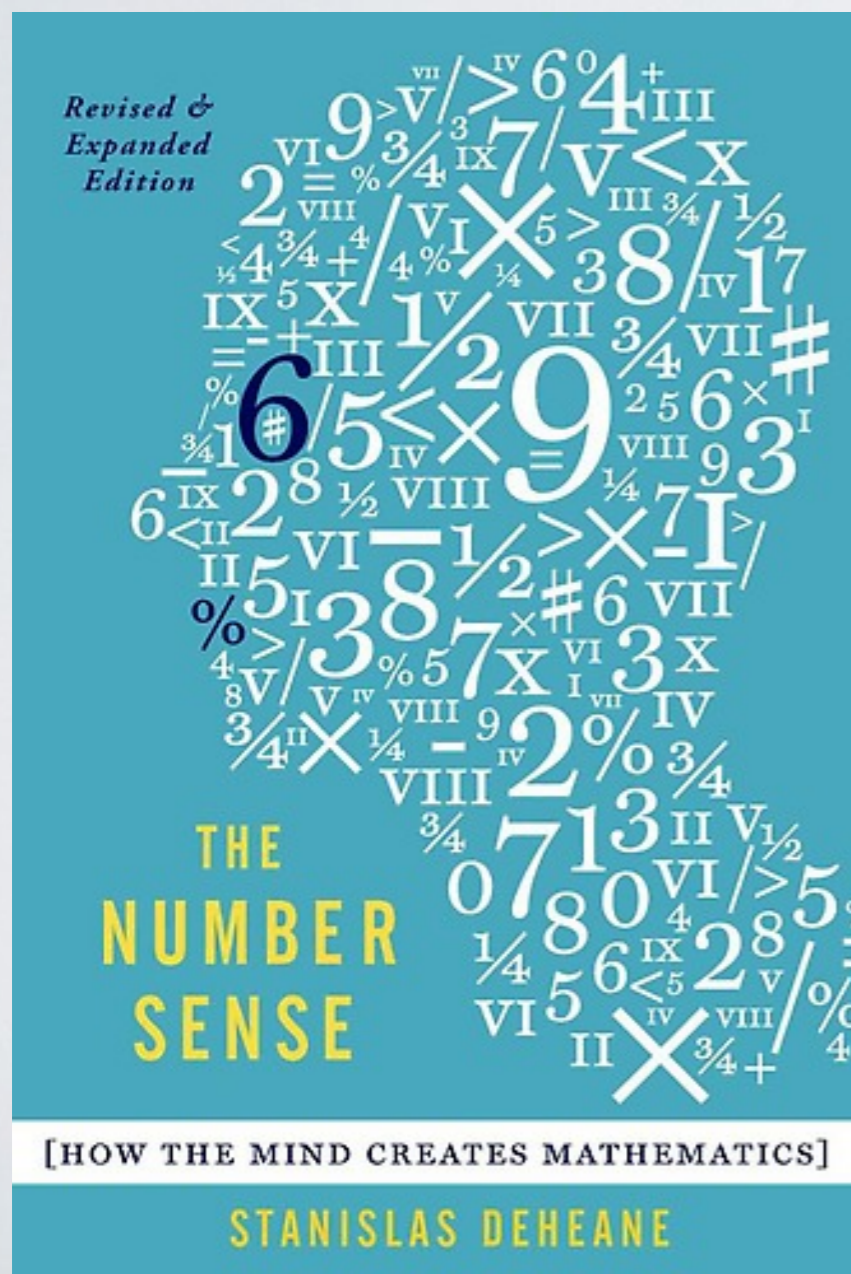


WYKŁAD 15: POZNANIE NUMERYCZNE

Psychologia poznawcza

dr Mateusz Hohol

ZMYSŁ NUMERYCZNY



„Zmysł ten dostarcza ludziom intuicji liczby (...), wynalazki kulturowe, takie jak liczydło czy cyfry arabskie, zmieniają go w pełnoprawną symboliczną matematykę”.



ZDOLNOŚCI NUMERYCZNE

Davis i Pérusse, 1988

- **szacowanie (estymacja)**

- porównywanie liczebności dwóch zbiorów, rozstrzyganie który z nich ma więcej elementów

- **subitacja (*subitizing*)**

- od łac. *subitus*, czyli „nagły”: szybka i precyzyjna ocena liczebności niewielkich zbiorów (intuicja liczebności)

- **liczenie**

- pozwala określić liczebność zbiorów z dużą precyzją, może dotyczyć zbiorów o dużej liczbie elementów, jest czasochłonne, wymaga treningu

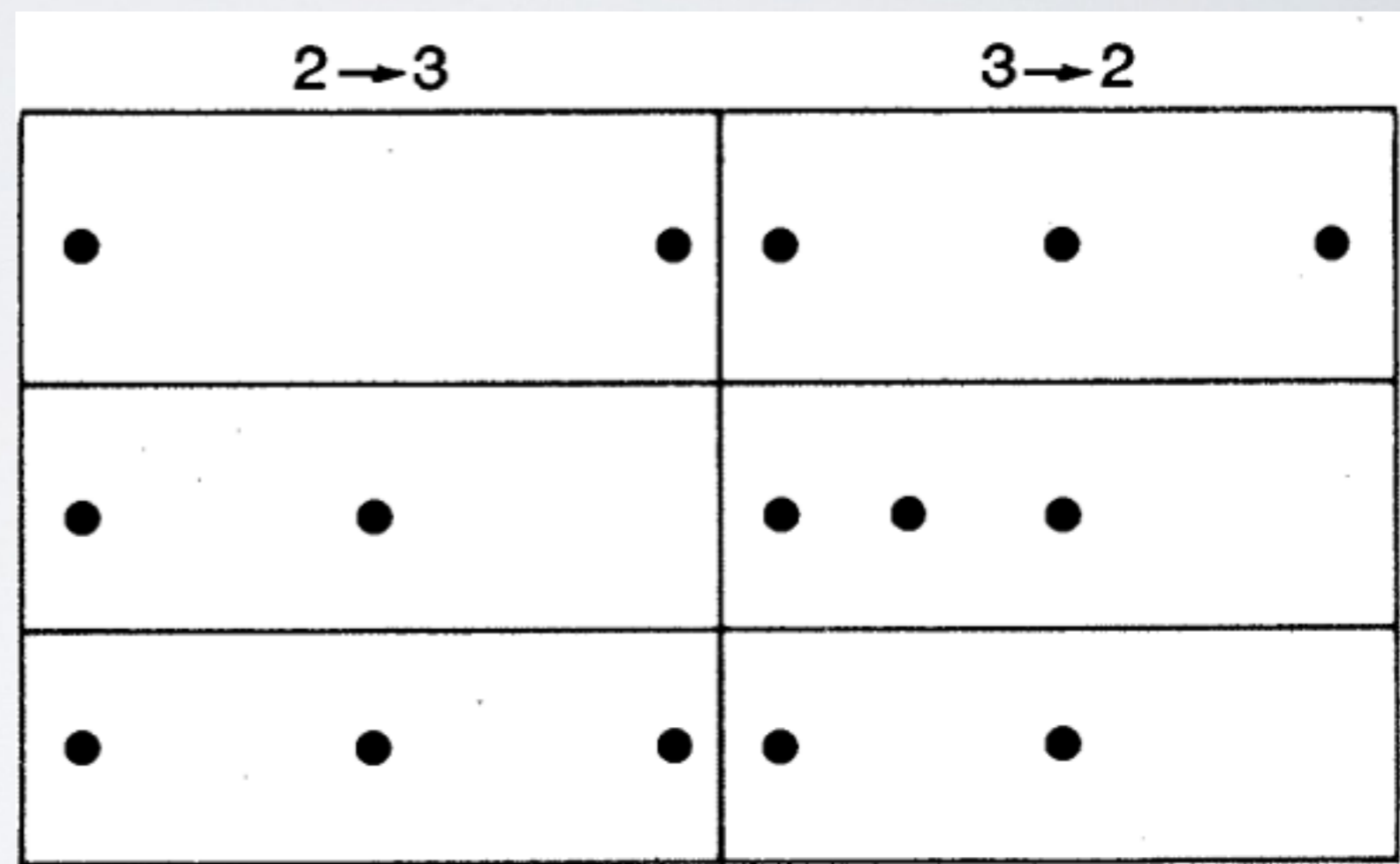


- 3-5 dni po urodzeniu dzieci potrafią odróżniać zbiory dwuelementowe od trójelementowych oraz trójelementowe od czteroelementowych.
- Czteromiesięczne niemowlęta rozumieją, że gdy do jednego przedmiotu dołożony zostanie drugi, w sumie pojawią się dwa przedmioty („dodawanie”) – dzieci zdają się ponadto rozumieć także odwrotną operację („odejmowanie”).
- Kilkumiesięczne dzieci potrafią porównywać informacje pochodzące z różnych zmysłów – na przykład są w stanie ustalić, że liczba uderzeń w bębenek jest taka sama jak liczba obserwowanych przedmiotów

DYSKRYMINACJA

ZBIORÓW PRZEZ NIEMOWLĘTA

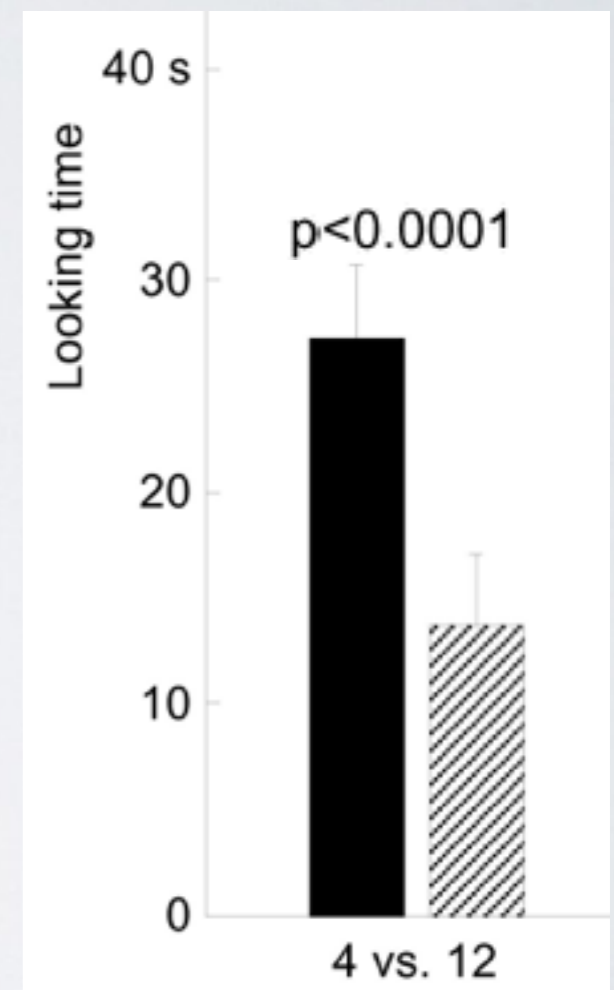
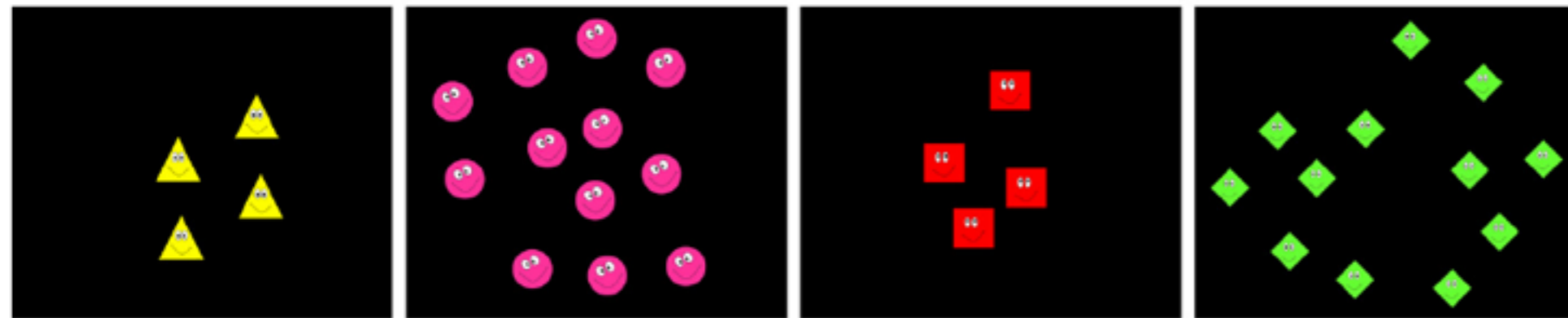
- paradygmat habituacji
- pomiar czasu fiksacji wzrokowej na bodźcu



Starkey i Cooper, 1980

POSTRZEGANIE RÓWNOLICZNOŚCI

... " tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu-tu " ... " ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra-ra- " ...
or
... " tuuuuu-tuuuuu-tuuuuu-tuuuuu " ... " raaaaa-raaaaa-raaaaa-raaaaa " ...



con. incon.

Izard, Sann, Spelke i Streri, 2009

ZRÓŻNICOWANIE KULTUROWE



- liczebniki występują niemal we wszystkich językach, jednak w wielu kulturach ich zakres jest bardzo ograniczony.
- członkowie plemienia Pirahã zamieszkującego w dżungli amazońskiej posługują się jedynie trzema liczebnikami: „jeden”, „dwa” oraz „wiele”.
- lud Munduruku (brzeg Amazonki) używa liczebników kończących się na „pięć”.

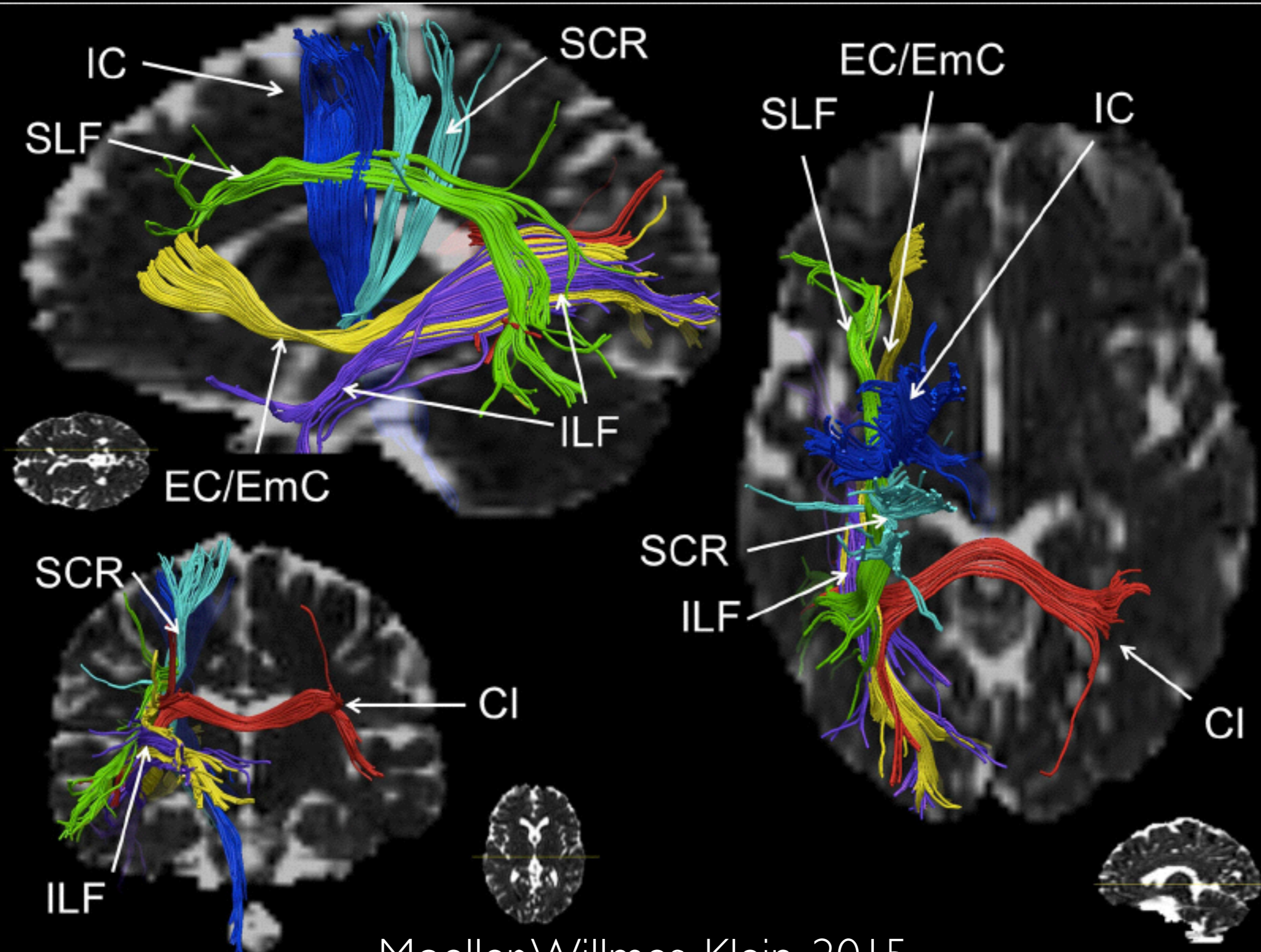
- Gelman i Butterworth (2005): „trzeba odróżnić pomiędzy posiadaniem pojęcia liczebności (wiedzą, że każdy zbiór ma liczebność, którą można ustalić poprzez wyliczenie) i posiadaniem językowej reprezentacji konkretnych liczebności”.
- Systemy numeryczne i językowe w mózgu są od siebie oddalone.
- nieumiejętność dokładnego liczenia przez członków plemion amazońskich może wynikać z tego, że nie rozumieją stawianych przed nimi zadań.



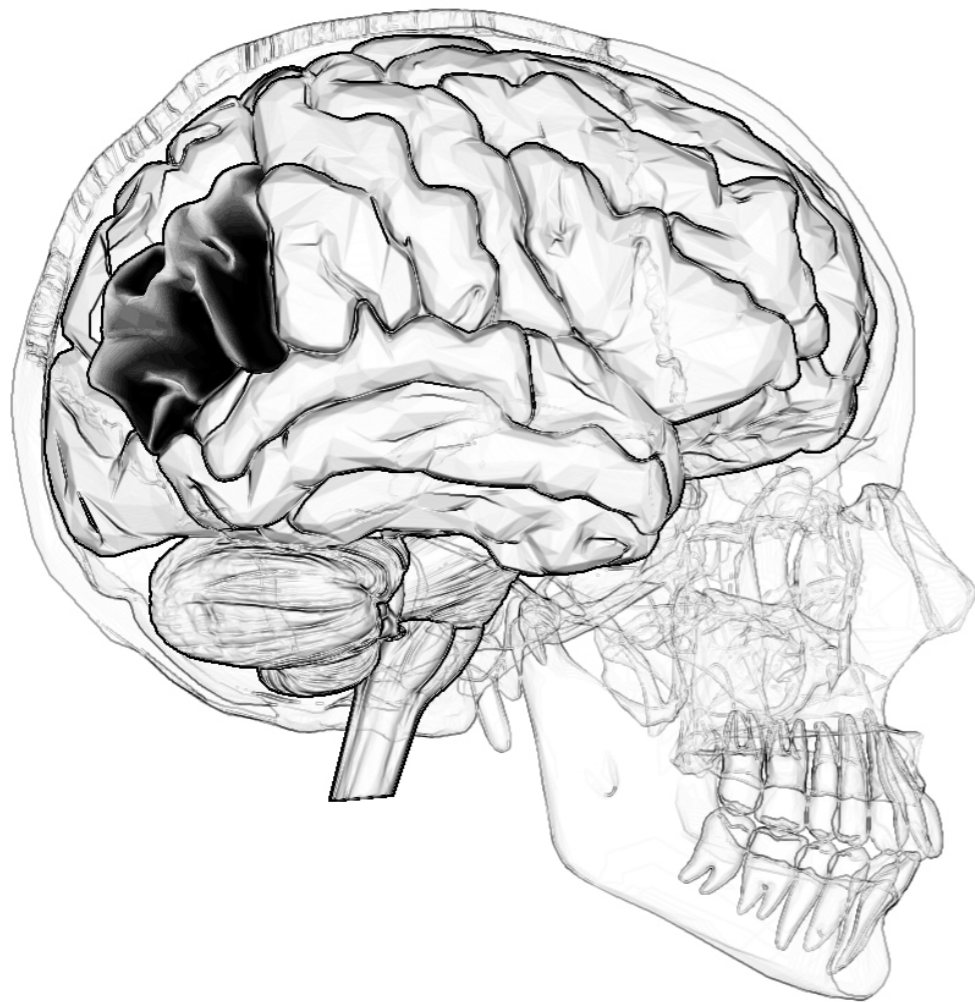
- Butterworth i wsp. (2008) porównywali zdolności numerycznych dzieci z terenu Australii:
 - dzieci z Melbourne (anglojęzyczne)
 - dzieci z plemienia Warlpiri – liczebniki: pojedynczy, podwójny i większy niż podwójny
 - dzieci z plemienia Anindilyakwa – liczebniki: pojedynczy, podwójny, potrójny (który w praktyce obejmować może także liczbę cztery) oraz mnogi (większy niż potrójny)



- Zadania obejmowały: zapamiętywanie liczby żetonów, kojarzenie liczby żetonów z liczbą słyszanych dźwięków, pozawerbalne dodawanie i dzielenie ciasta.
- Dzieci ze wszystkich trzech grup radziły sobie podobnie, co wskazuje na brak wpływu języka na wykonywanie zadań numerycznych i arytmetycznych.
- Wątpliwości teoretyczne: co rzeczywiście sprawdzały zadania? Związki języka naturalnego i matematyki są skomplikowane.



Moeller, Willmes, Klein, 2015

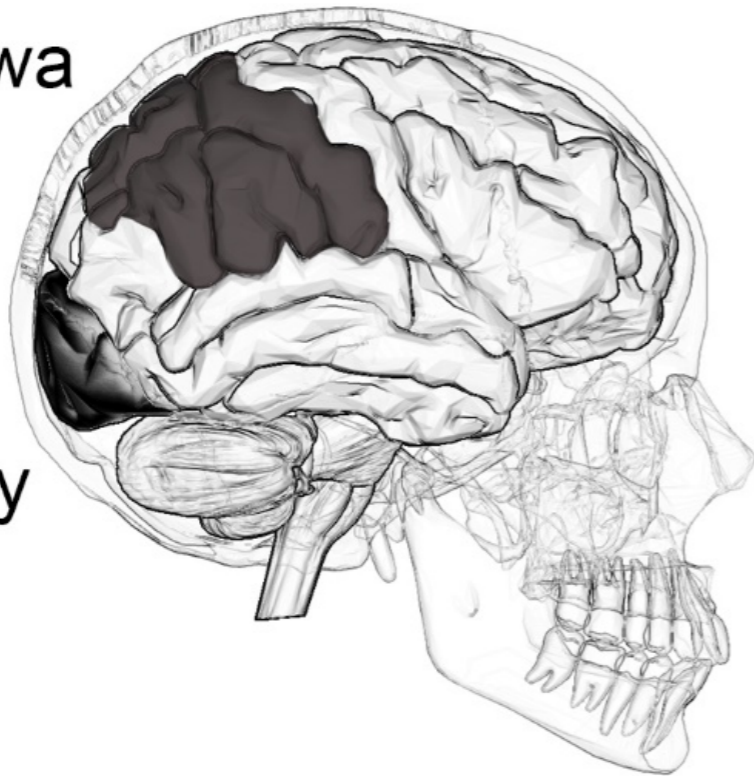


- Liczenie angażuje przede wszystkim pewne obszary kory przedczołowej (PFC) oraz struktury dolnej części płata ciemieniowego, szczególnie zakręt kątowy (*angular gyrus*)
- Zespół Gerstmann: agnozja palców, akalkulia, agrafia, zaburzenia orientacji lewa-prawa strona, występuje przy lezjach zakrętu kąтового

SYSTEM ŚLEDZENIA OBIEKTÓW

tylna kora
ciemieniowa

płat
potyliczny



- Liczba śledzonych naraz obiektów wynosi ok. 4
- Śledzenie ze względu na kształt, kolor, trajektorię
- System może warunkować tworzenie precyzyjnych reprezentacji numerycznych

SYSTEM LICZB PRZYBLIŻONYCH

- Odpowiada za szacowanie liczebności obiektów w zbiorze
- Liczebności przetwarzane analogowo
- Czulość ANS zmienia się w trakcie ontogenezy
- Mózgowa lokalizacja systemu: neurony bruzdy śródcieniowej



UŁAMEK WEBERA

- dla noworodków – 1:3
- dla półrocznych niemowląt – 1:2
- dla rocznych dzieci – 2:3
- dla czterolatek – 3:4
- dla siedmiolatek – 4:5
- dla dwudziestolatek – 7:8

noworodki:

- odróżniają zbiory o liczebności: 1 i 3; 2 i 6 czy 10 i 30 elementów
- nie potrafią rozróżnić zbiorów o liczebności: 1 i 2; 2 i 5 czy 15 i 27

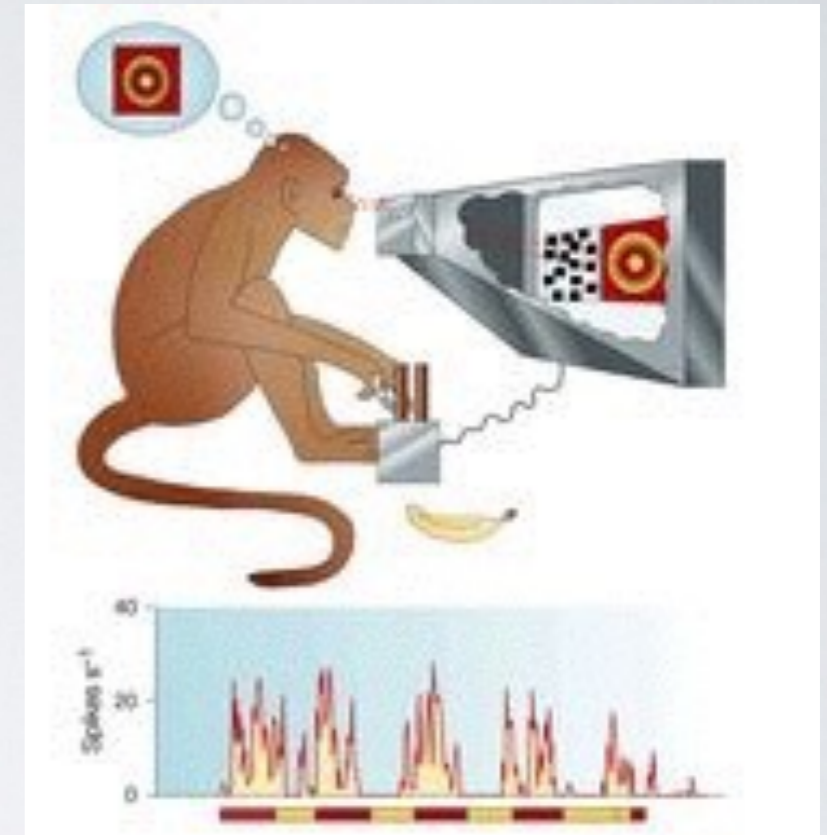
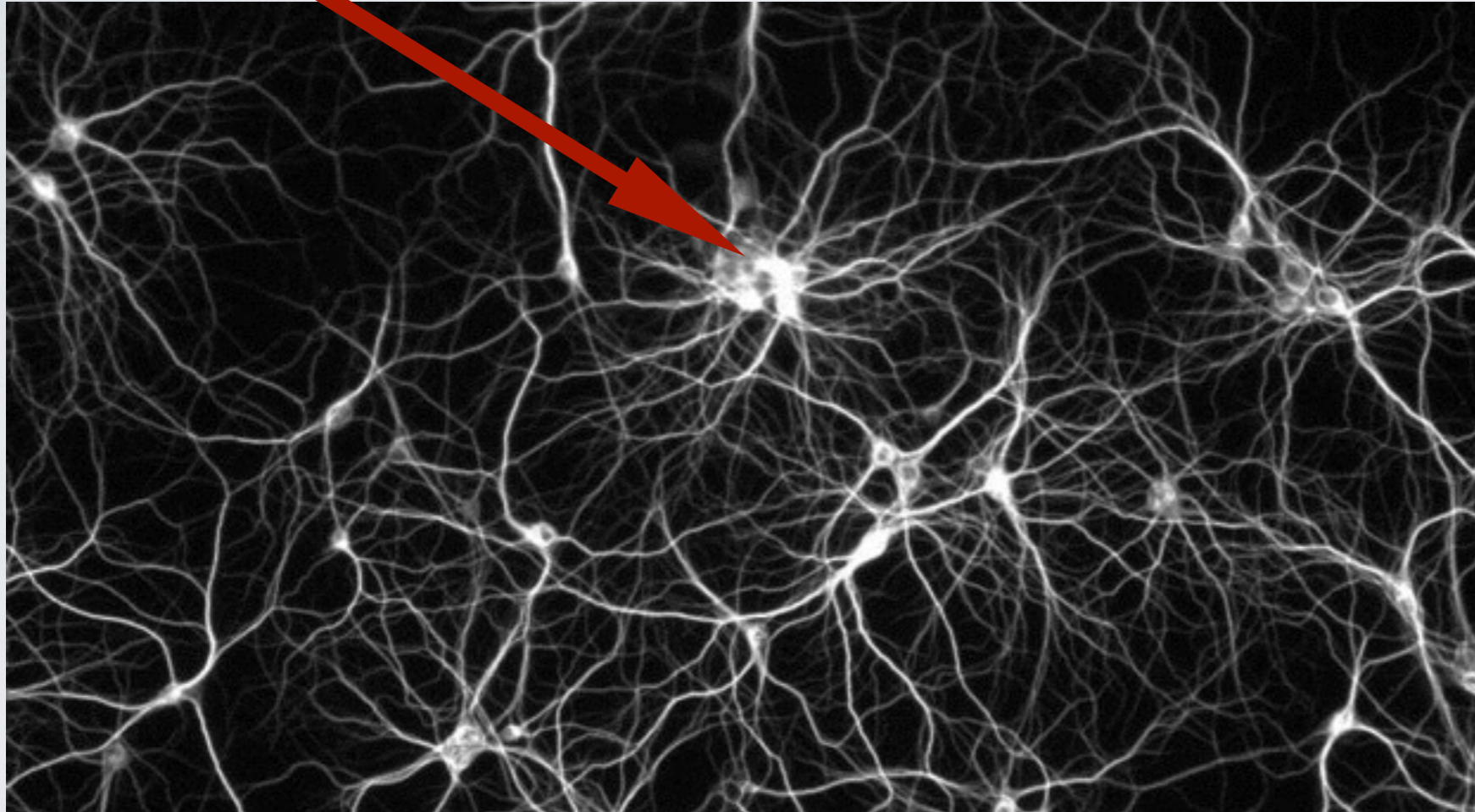
czterolatki:

- odróżniają zbiory o liczebności 4 i 6 czy 12 i 16 elementów
- nie odróżniają zbiorów o liczebności: 7 i 8 lub 12 i 15

dorośli:

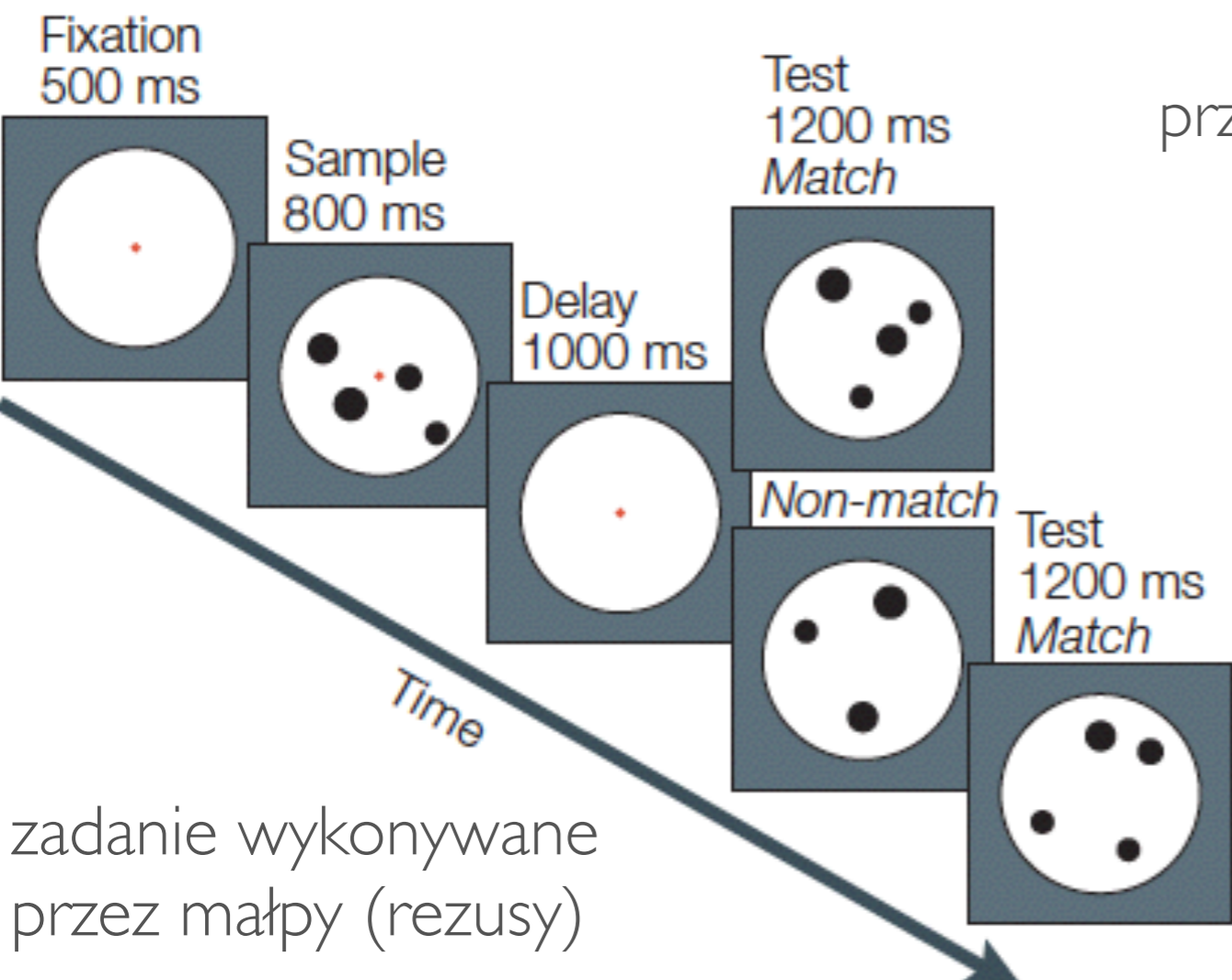
- rozróżniają zbiory o liczebności 14 i 16 bądź 70 i 80 elementów
- nie odróżniają zbiorów o liczebności 70 i 78.

NUMERONY

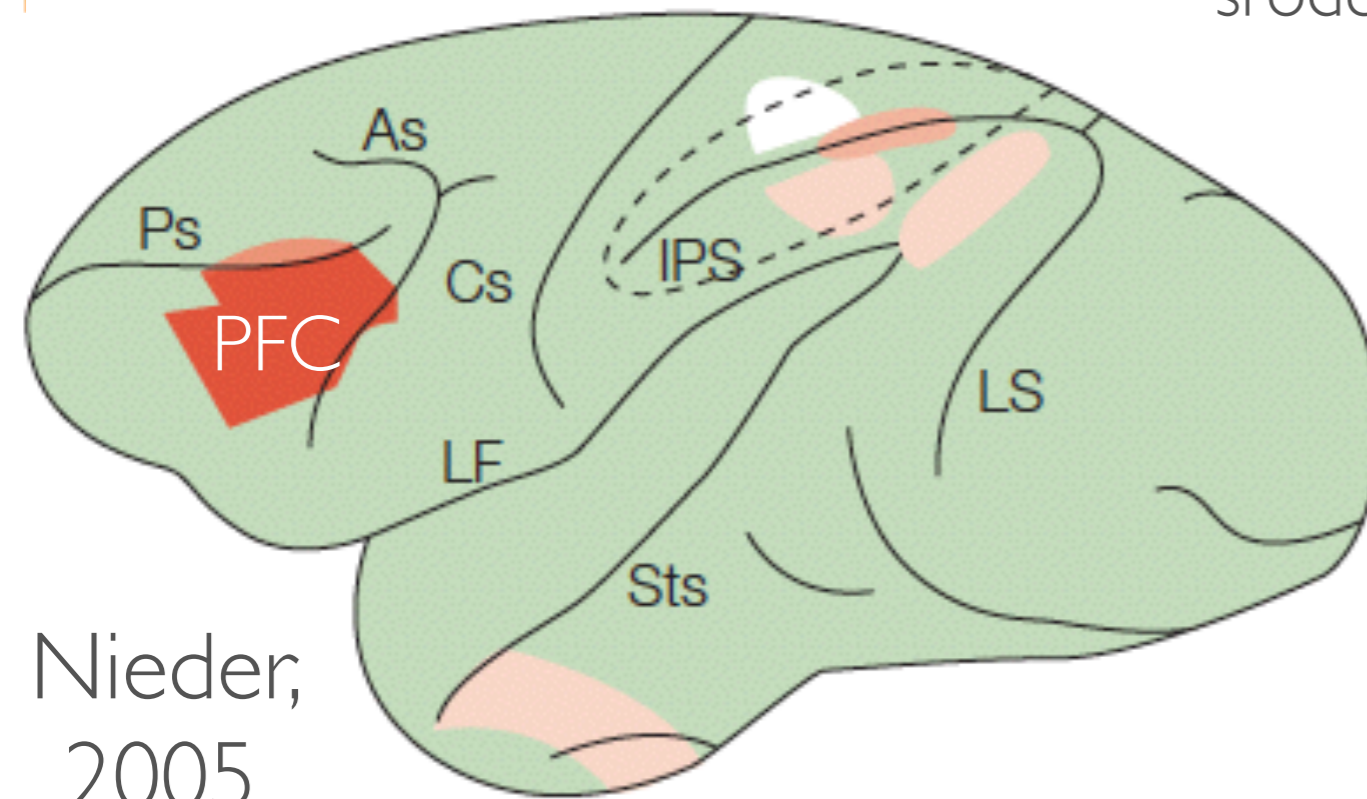


Nieder i wsp. badali jak pojedyncze neurony kodują pojedyncze liczby (zarówno symboliczne, jak i niesymboliczne), a także przetwarzane ciągłych i dyskretnych własności



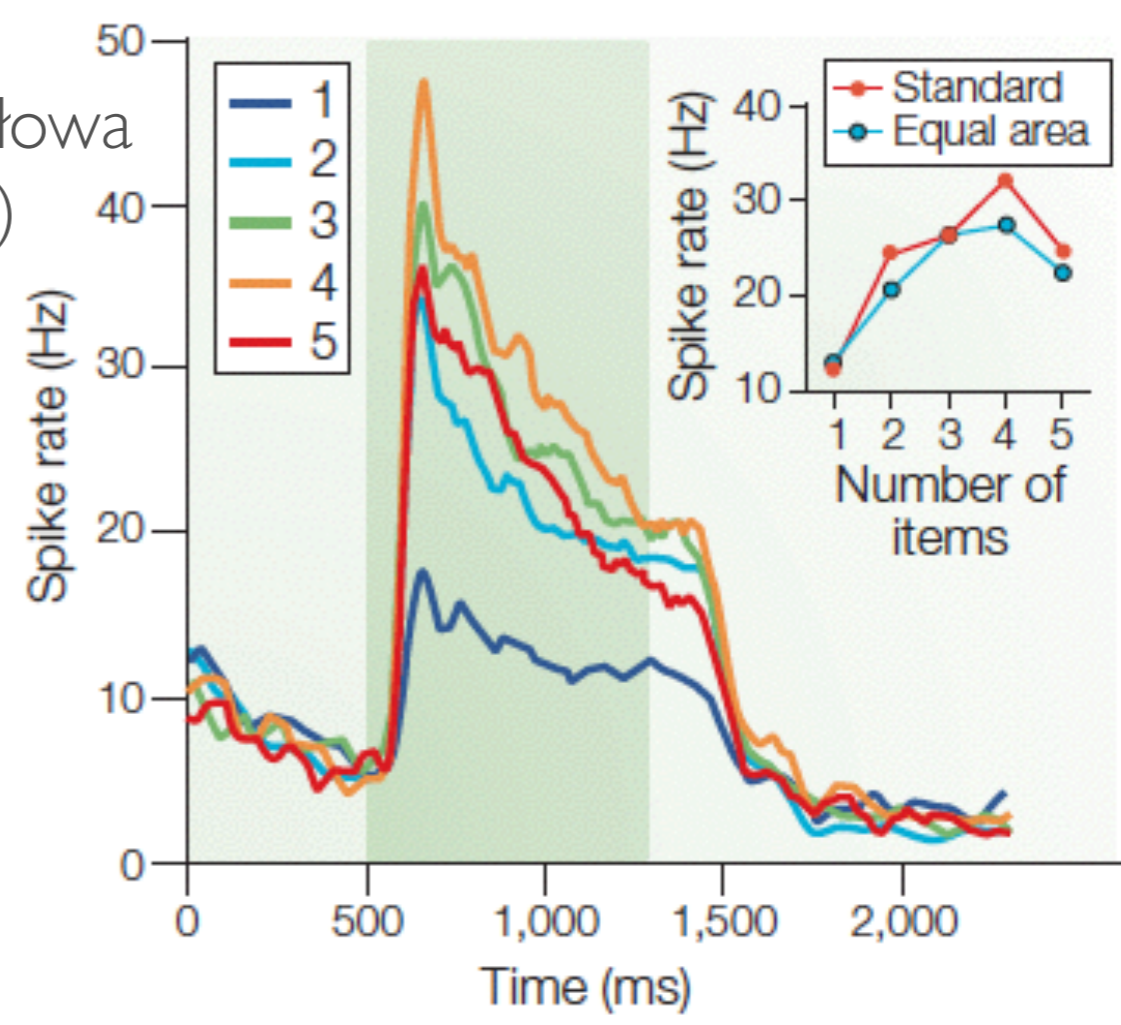


zadanie wykonywane przez małpy (rezusy)

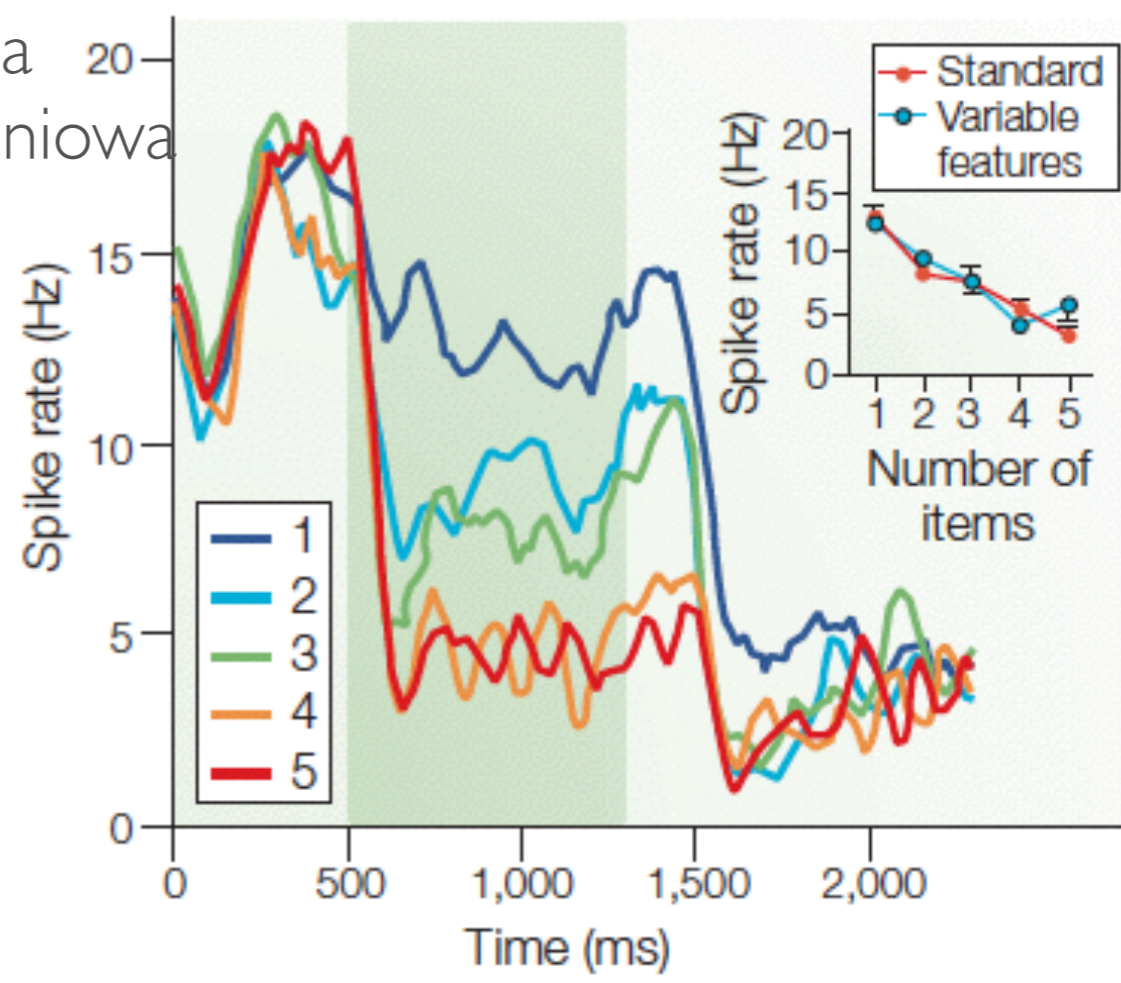


Nieder, 2005

kora przedczołowa (PFC)



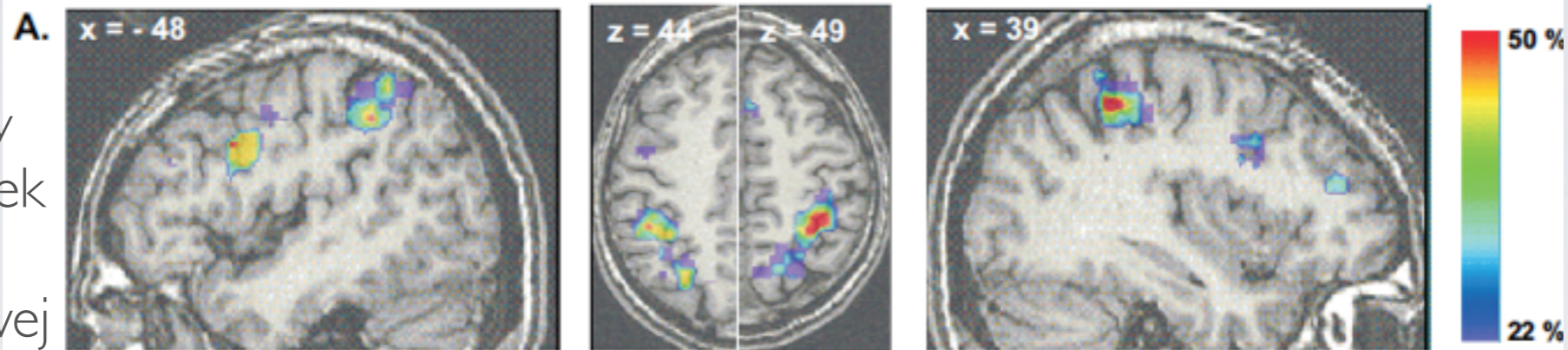
bruzda śródcieniowa (IPS)



MODEL POTRÓJNEGO KODOWANIA (TCM)

HIPS

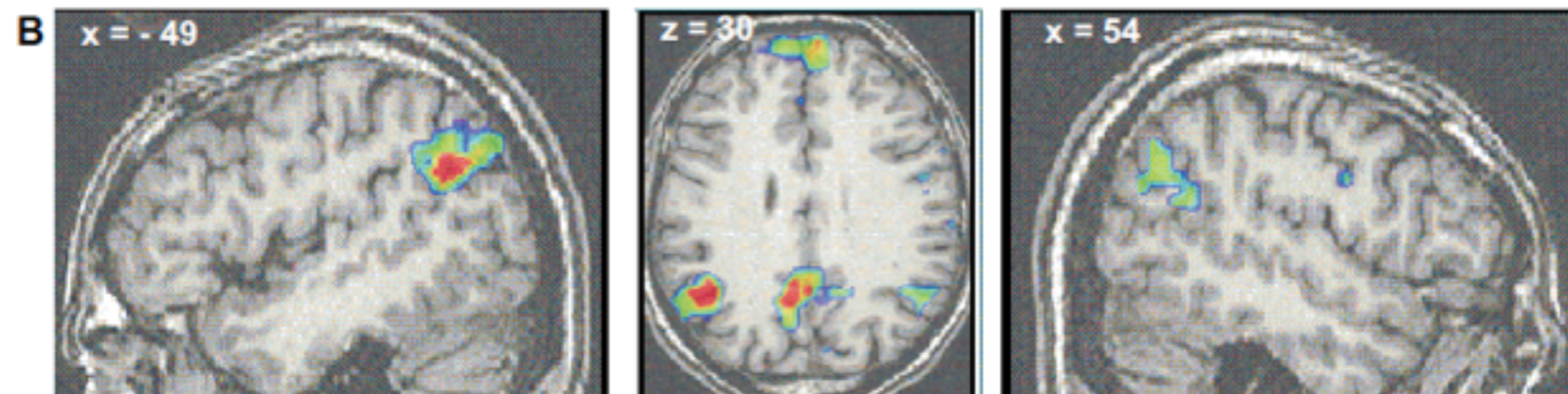
obupółkulowy
poziomy odcinek
bruzdy
śródcieniowej



zadania
polegające na
manipulacji
ilością

AG

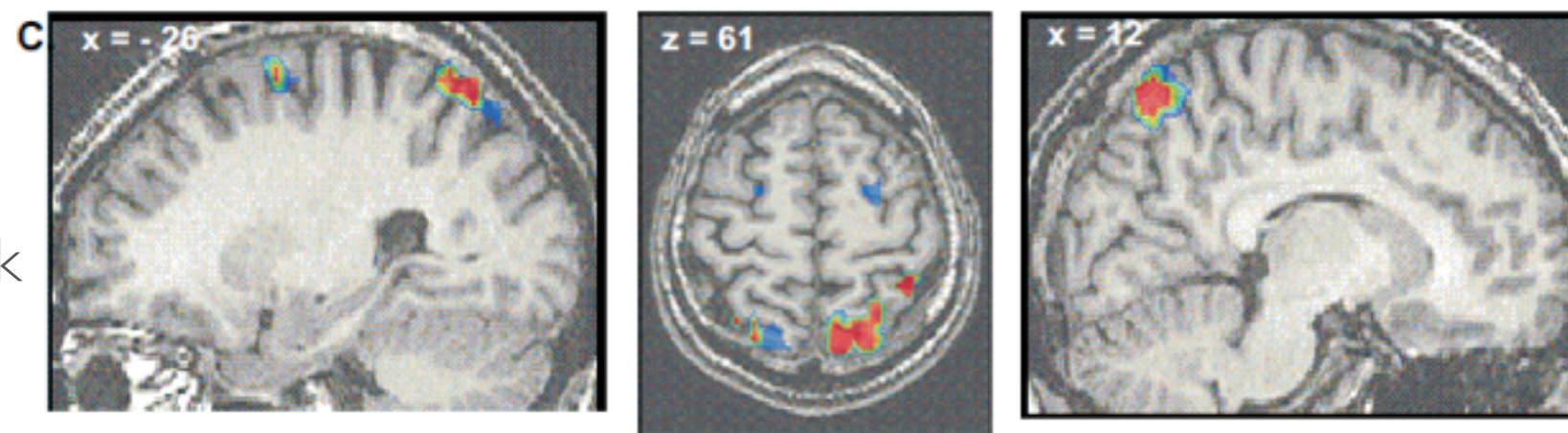
zakręt kątowy



zadania
numeryczne z
wyraźnym
komponentem
językowym

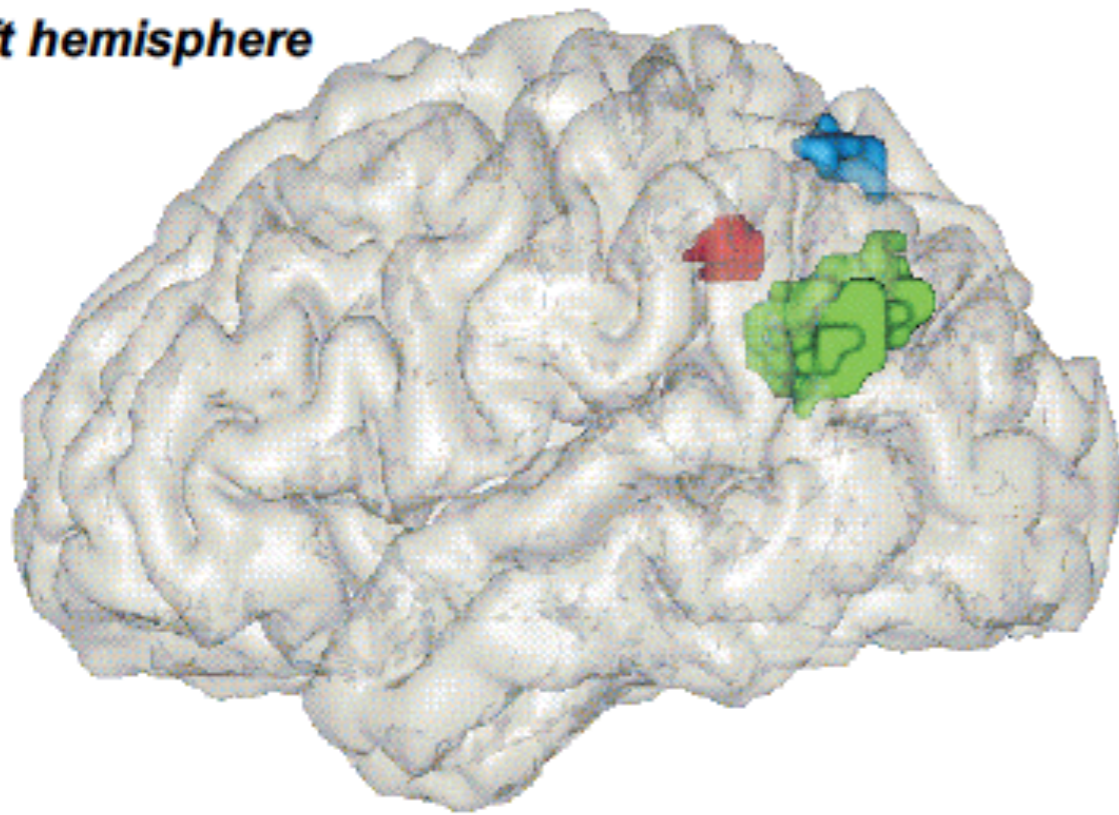
PSPL

obupółkulowy
tylny górny płacik
ciemieniowy

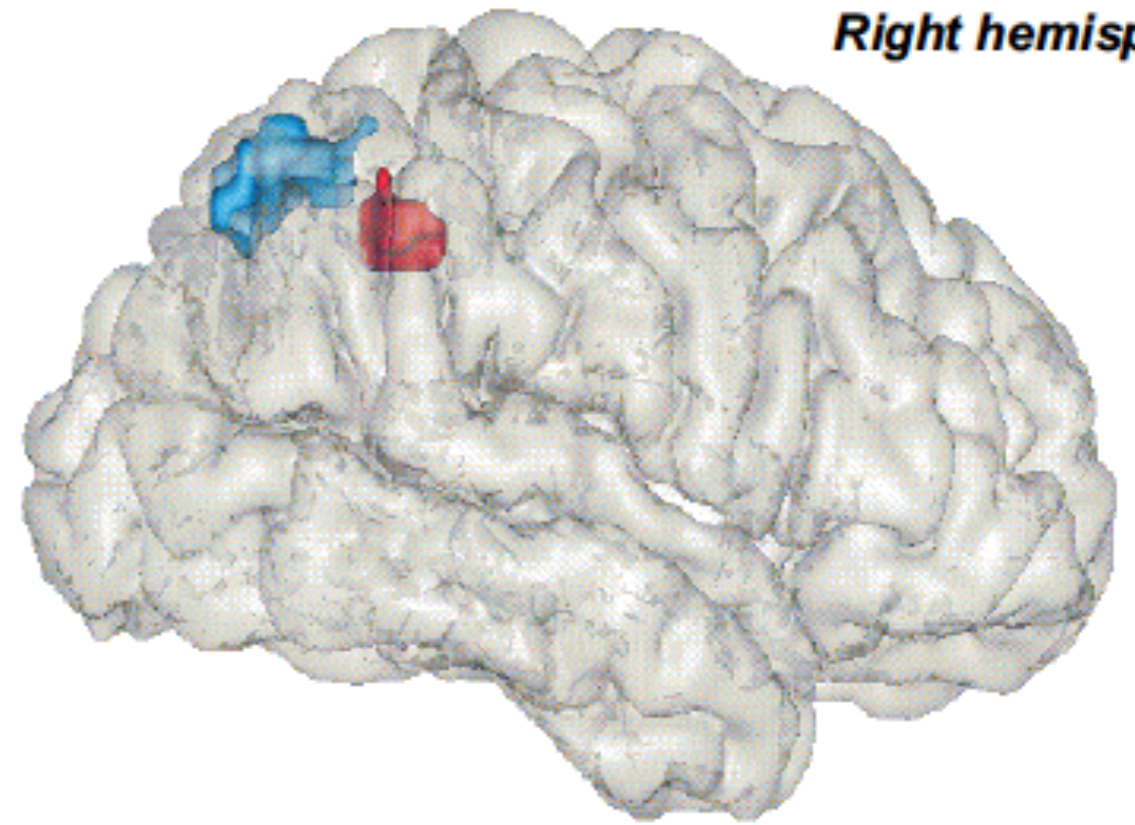


zadania
wymagające
uwagowej
orientacji na osi
liczbowej

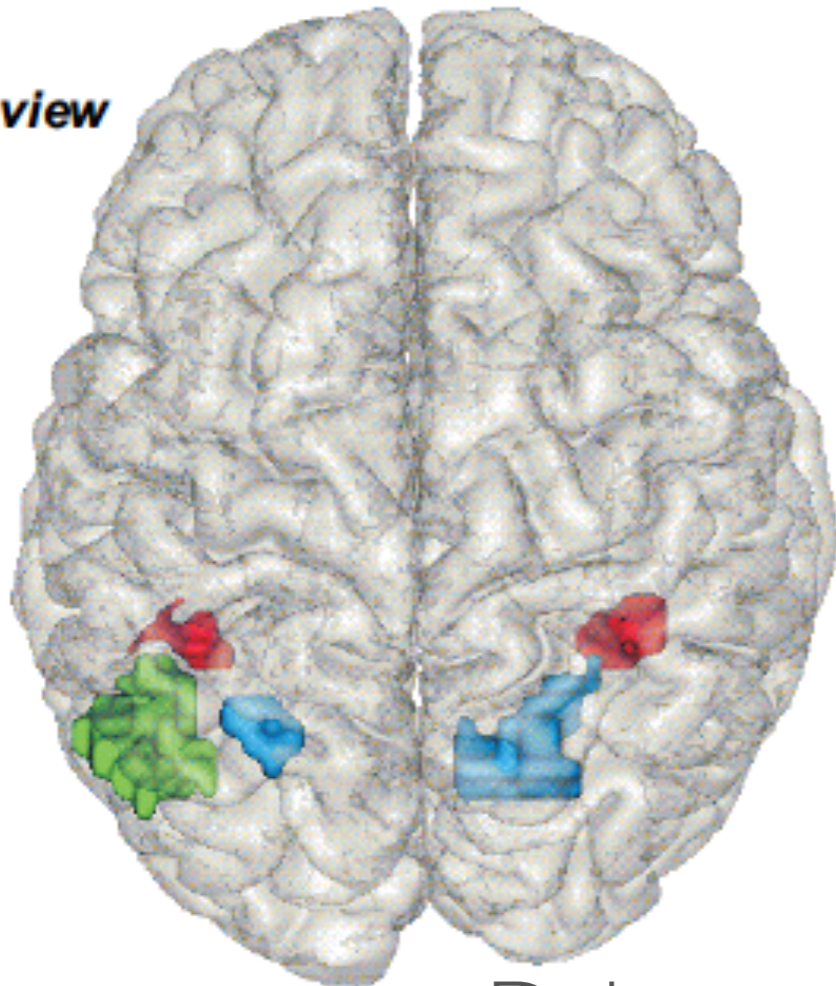
Left hemisphere



Right hemisphere




Top view



HIPS - obupółkulowy poziomy odcinek bruzdy śródcieniowej:

 **reprezentacja wielkości**

 **AG** - lewy zakręt kątowy:
językowa reprezentacja liczby

 **PSPL** - obupółkulowy tylny górny płacik ciemieniowy:
wizualno-uwagowy aspekt liczby

ANALOGOWE KODOWANIE REPREZENTACJI LICZB

- Reprezentacje liczb wydają się być przez umysł przetwarzane inaczej niż wynikałoby to z tego, w jaki sposób liczby są rozumiane w matematyce
- Badacze mówią w tym kontekście o tak zwanym analogowym kodowaniu wielkości liczbowych i posługują się metaforą **Mentalnej Osi Liczbowej**

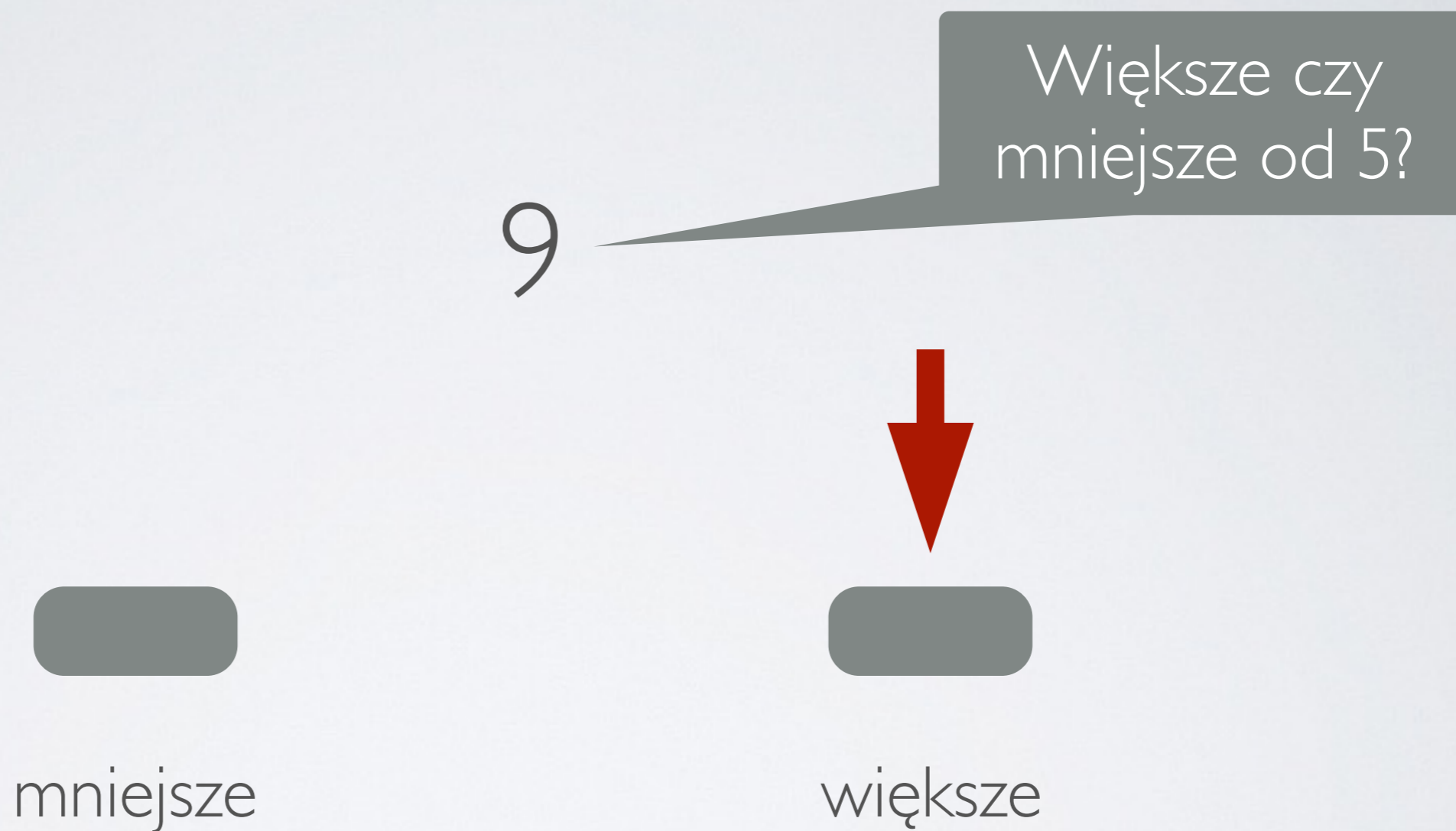
MENTALNA OŚ LICZBOWA (RESTLE, 1970)

- Na niej uporządkowane są reprezentacje liczb
- Do aktywacji informacji o wielkości liczby dochodzi automatycznie kiedy tylko ją spostrzeżemy, nawet jeżeli zadanie, które mamy wykonać nie wymaga operowania na wielkości liczby (np. mamy określić czy jest napisana kursywą czy normalną czcionką)

DOWODY NA ANALOGOWĄ REPREZENTACJĘ WIELKOŚCI LICZB

- Efekt dystansu numerycznego (Moyer i Landauer, 1967)
- Osoby badane mają porównywać ze sobą liczby
- Bardzo dokładnie jest mierzony czas potrzebny na dokonanie takiego porównania

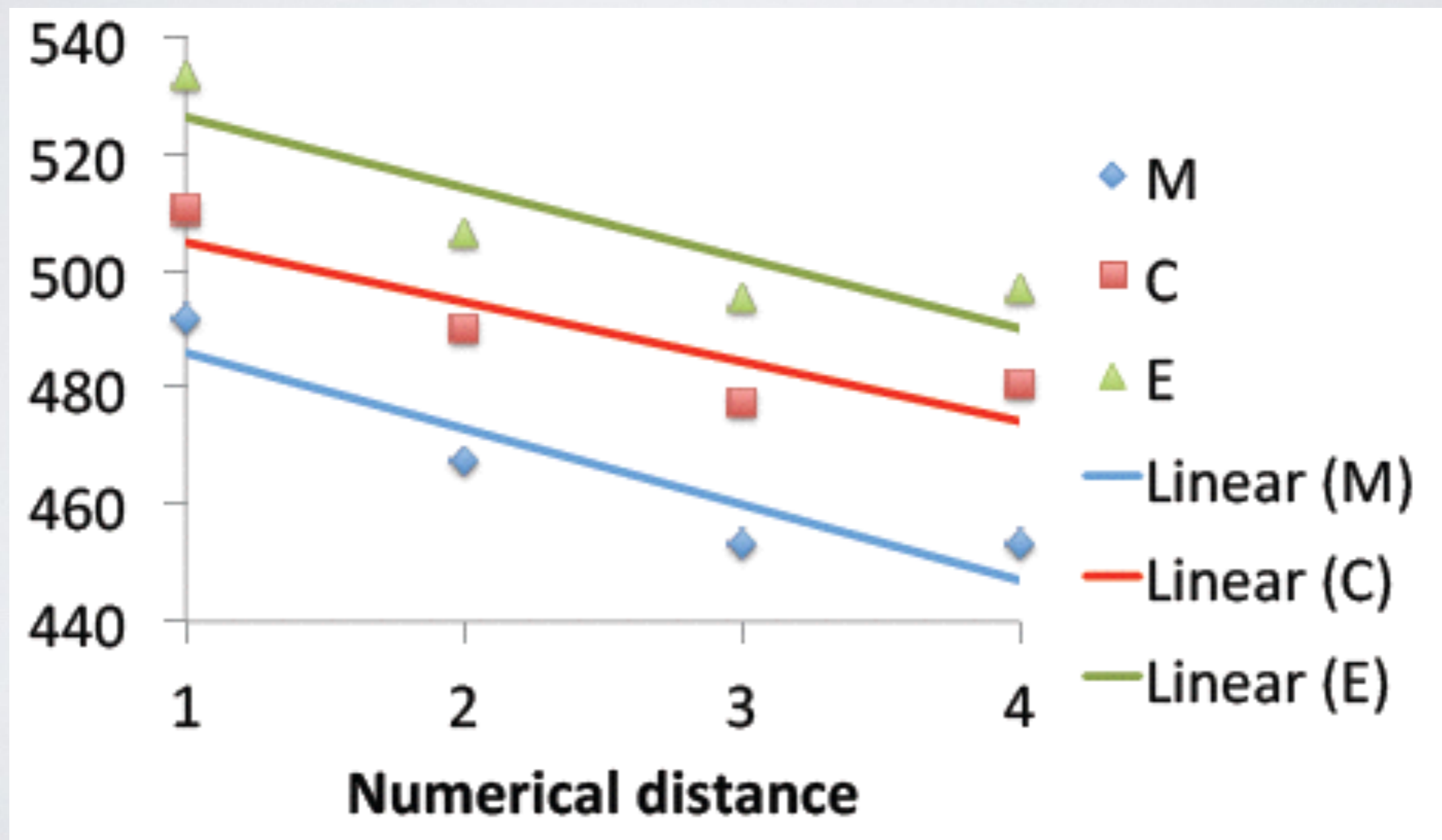
EFEKT DYSTANSU - SCHEMAT



EFEKT DYSTANSU NUMERYCZNEGO

- Im większa różnica między porównywanymi liczbami tym badani potrzebują mniej czasu na to, aby dokonać porównania
 - Tym większa jest odległość między nimi na mentalnej osi liczbowej i tym szybciej można określić, która liczba jest większa
- Różnica ta jest wyraźna nawet dla liczb jednocyfrowych
- Efekt ten pojawia się bez względu na poziom umiejętności matematycznych

DYSTANS NUMERYCZNY - PRZYKŁADOWE WYNIKI



O CZYM ŚWIADCZY EFEKT DYSTANSU

- Reprezentacje wielkości liczb mają postać analogową
- Abstrakcyjna wielkość liczbowa jest reprezentowana podobnie jak wielkości fizyczne takie jak długość odcinka czy wielkość obiektu
- Aby reprezentować i efektywnie przetwarzać obiekty abstrakcyjne umysł odnosi je do konkretnego i dzieje się tak niezależnie od poziomu umiejętności matematycznych

WNIOSKI

- Założenie analogowej reprezentacji wielkości liczb jest obecne w wielu teoriach z zakresu poznania matematycznego i badacze bardzo często się do niego odwołują
- Taki komponent reprezentacji wielkości liczby jest niezwykle istotny dla sprawnego nabywania kompetencji matematycznych jak również posługiwania się liczbami
- Metafora mentalnej osi liczbowej jest niezwykle pomocna do opisu i interpretacji wyników wielu badań z zakresu poznania matematycznego

EFEKT ROZMIARU

- Niezależnie od dystansu numerycznego, porównania liczb o dużej wartości trwają dłużej, niż porównania liczb o małej wartości
- Innymi słowy, szybciej porównamy 1 z 2 niż 8 z 9
- Świadczyć to może o logarytmicznej kompresji mentalnej osi liczbowej
- To w jaki sposób przetwarzamy liczby w zapisie symbolicznym bardzo przypomina zjawiska opisywane w przypadku operowania na materiale niesymbolicznym

REPREZENTACJA ANALOGOWA A PRZESTRZENNA

- Wydaje się, że analogowa reprezentacja wielkości liczb jest naturalna i uniwersalna
- Ale w bardzo wielu przypadkach mamy dowody na to, że reprezentacje liczb są przez nasz umysł wiązane z przestrzenią
- Wydaje się, że może to wynikać stąd, że nasz umysł nie jest dostosowany do radzenia sobie z materiałem abstrakcyjnym i odnosi to do konkretnych obiektów

DOWODY PRZESTRZENNEGO MAPOWANIA LICZB

CEREMONIA



Nobel Prize laureates Eric Maskin, Rich Roberts and Dudley Herschbach lean over behind a mini Eiffel Tower during a performance at the Ig Nobel Prize ceremony.

MANIPULACJA POSTAWĄ

- Równoważnia - trzeba tak się ustawić aby linia prezentowana na ekranie była pionowo
- Wymaga to lekkiego pochylenia w prawo bądź w lewo
- Osoby badane nie są świadome tego wychylenia
- Dokonują oszacowań

BADANIE

What is the height of the Eiffel tower in meters?

How many people live in Antwerp?

How many kilos does a newborn calf weigh?

How many kilos does an adult elephant weigh?

What is the distance in kilometers between Leeuwarden and Groningen as the crow flies?

How many number one hits did The Beatles have in the Netherlands?

What is the percentage of people older than 65 years in the Netherlands?

How many provinces does Canada have?

How many students enter Law School in the Netherlands annually?

How many languages exist worldwide?

What is the length of the Erasmus Bridge in Rotterdam in meters?

What is the land area of the Netherlands in square kilometers?

How many times is Norway larger than the Netherlands?

How many kilo calories does a croquette (fast food snack) contain?

How many millimeters does a human hair grow in a month?

How many homicides are there in the Netherlands annually?

What is the percentage of families that had access to internet in the Netherlands in 2009?

What is the percentage of Dutch people with higher education?

What is the percentage of the world population that is religious?

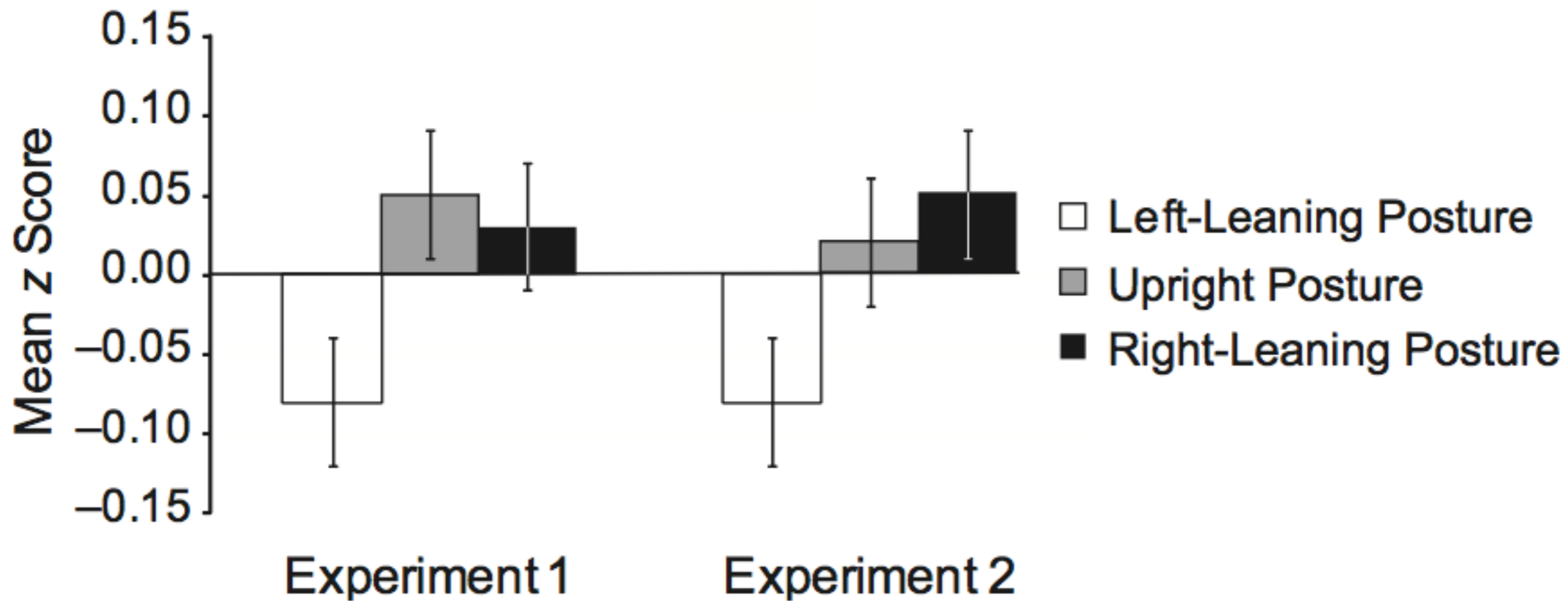


Fig. 1. Mean z scores (± 1 SE) for participants' estimates in the three posture conditions in Experiment 1 ($N = 33$) and Experiment 2 ($N = 58$).

LICZENIE W WINDZIE

OPEN  ACCESS Freely available online

 PLOS ONE

Counting Is Easier while Experiencing a Congruent Motion

Luisa Lugli^{1,2*}, Giulia Baroni¹, Filomena Anelli^{1,3}, Anna M. Borghi^{4,5}, Roberto Nicoletti¹

LICZENIE W WINDZIE I NA SCHODACH

- Obliczenia pamięciowe
 - dodawanie lub odejmowanie
- Ruch w płaszczyźnie pionowej
 - góra lub dół
 - aktywny (schody) lub bierny (windy)
 - w trakcie wykonywania obliczeń lub tuż przed nimi
 - rzeczywisty lub wyobrażony

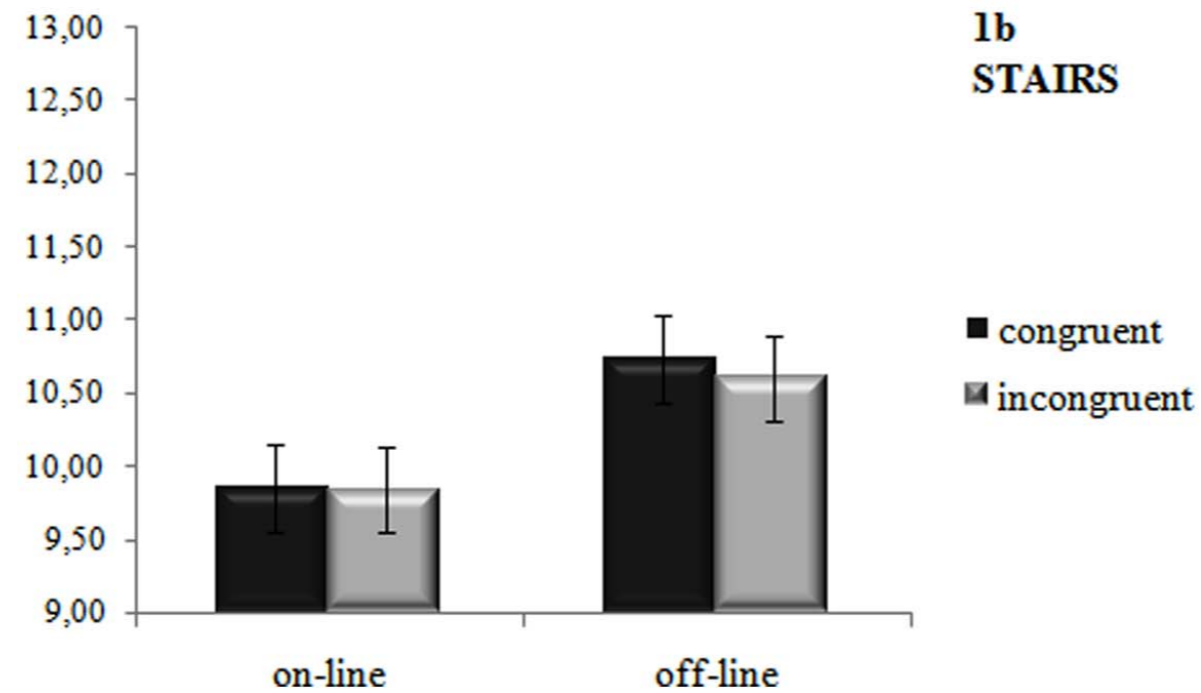
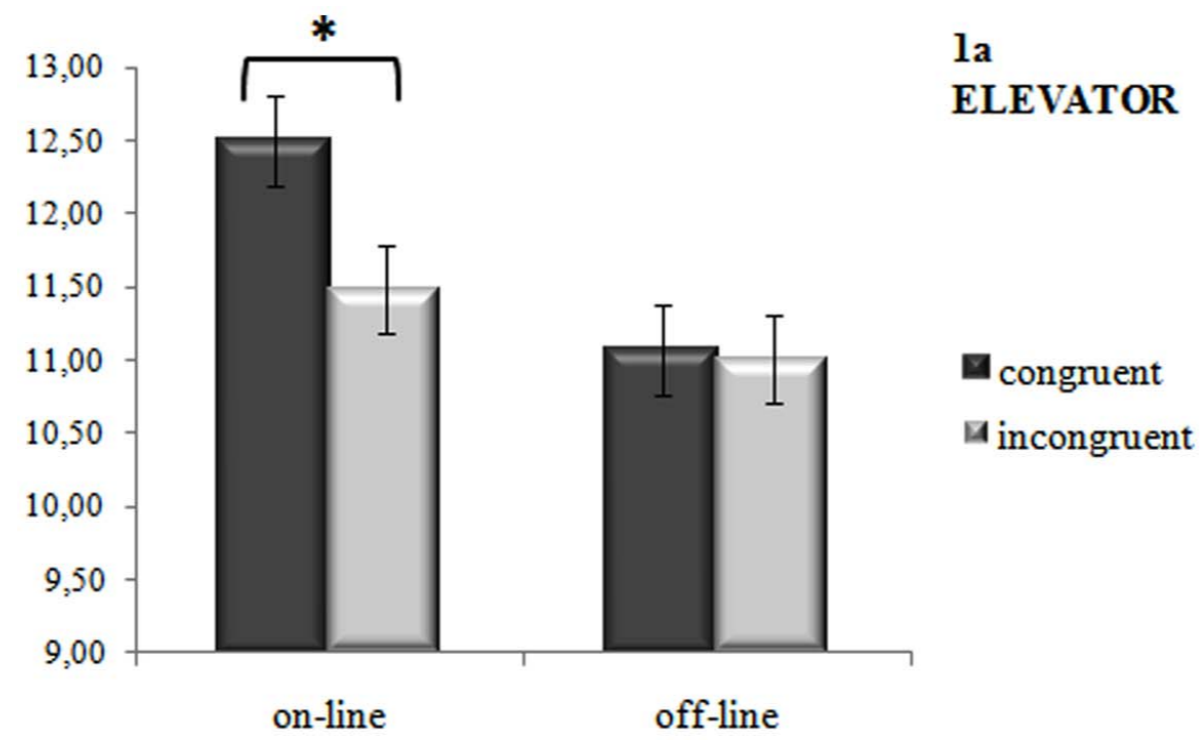


Figure 1. Number of calculations for congruent (ascending motion-additions; descending motion-subtractions) and incongruent pairings (ascending motion-subtractions; descending motion-additions) performed during (on-line condition) or after (off-line condition) experiencing the motions through a passive (i.e., elevator, panel 1a) or active (i.e., stairs, panel 1b) mode. Bars are standard error of the mean.

doi:10.1371/journal.pone.0064500.g001

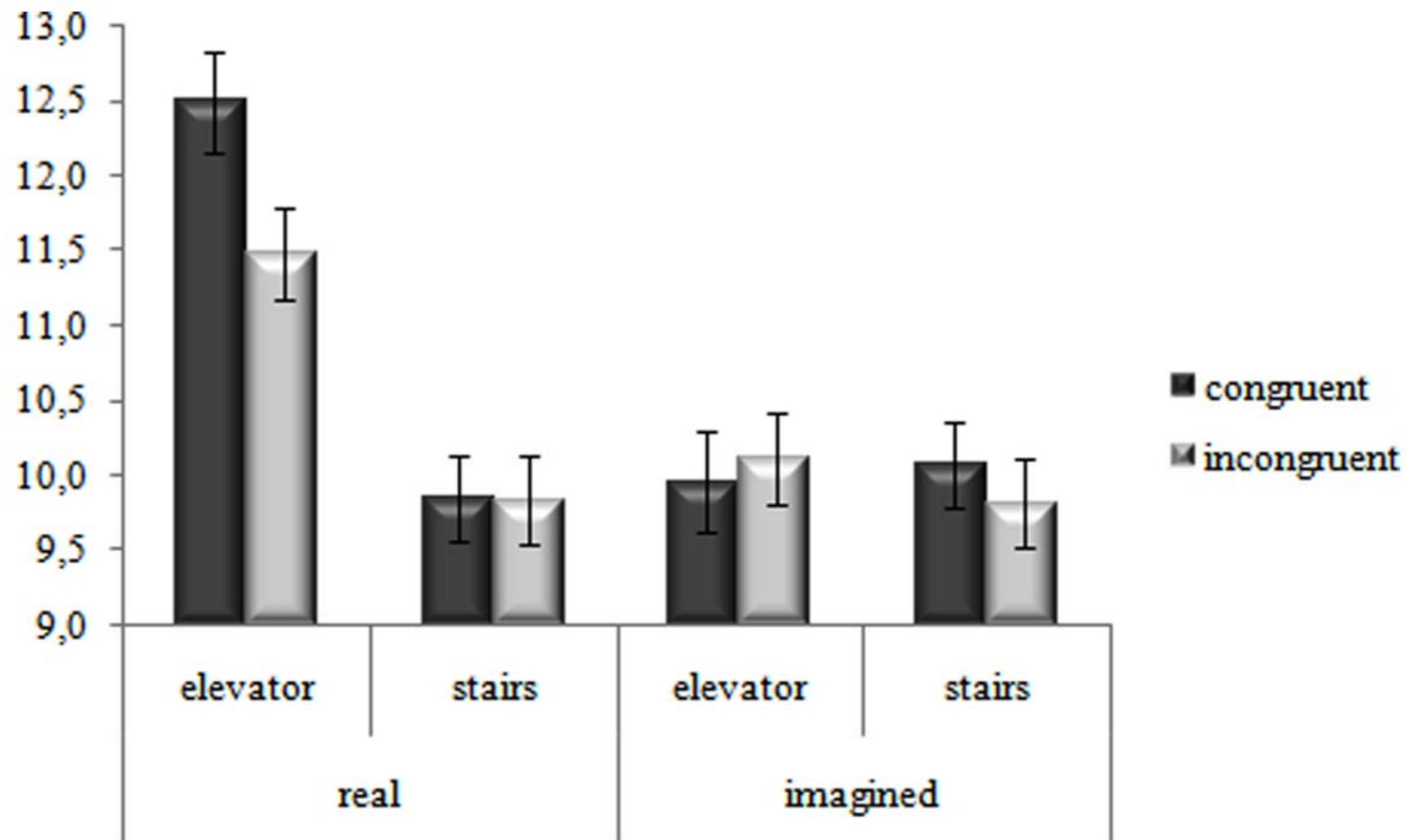
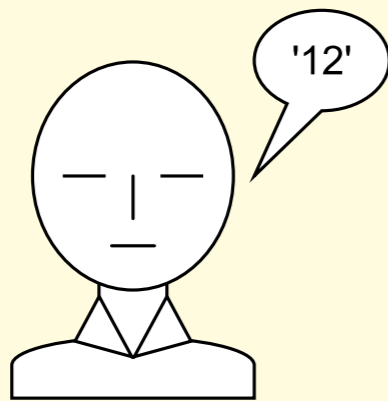
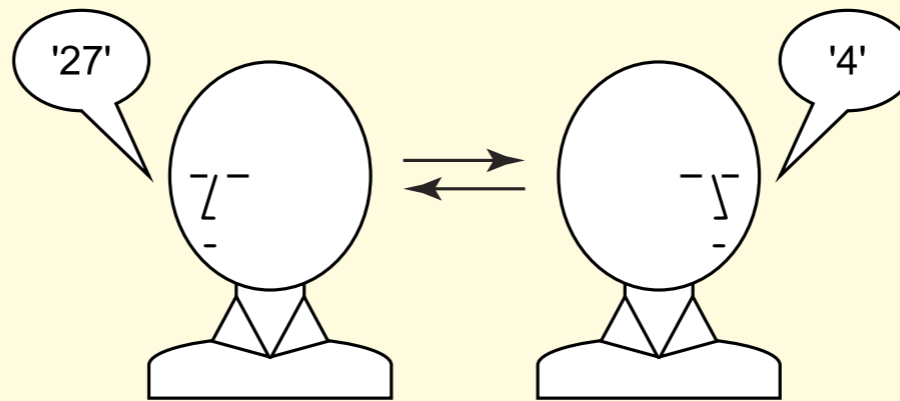
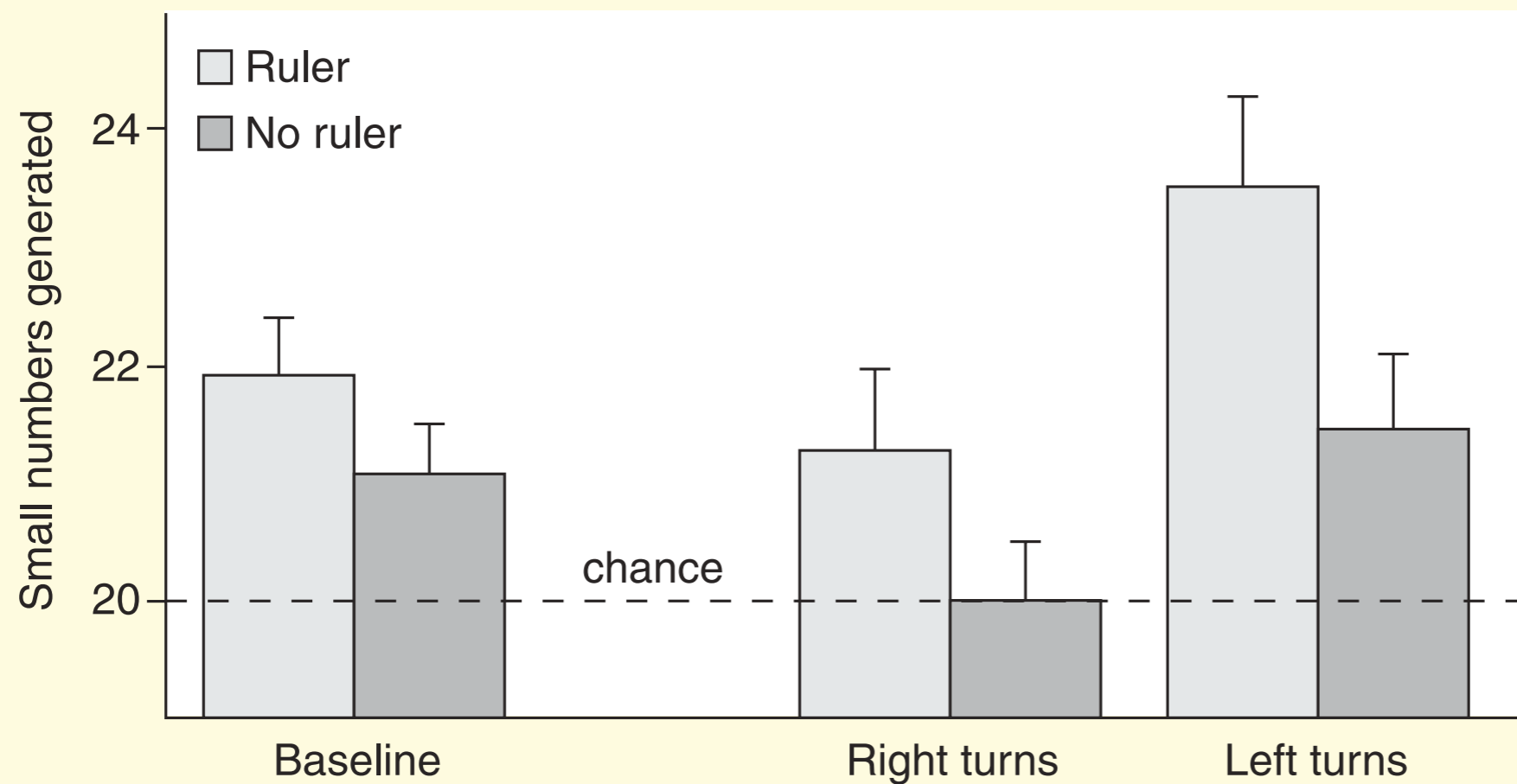


Figure 2. Number of calculations for congruent (ascending motion–additions; descending motion–subtractions) and incongruent pairings (ascending motion–subtractions; descending motion–additions) performed experiencing (i.e., real) or imagining (i.e., imagined) the motions through a passive (i.e., elevator) or active (i.e., stairs) mode. Bars are standard error of the mean.

doi:10.1371/journal.pone.0064500.g002

LOETSCHER I WSP. 2008

- Osoby badane mają za zadanie generować liczby losowe z zakresu 1-30
- W jednym z warunków mają w rytm metronomu kręcić na boki głową
- Badacze analizowali, czy podczas ruchu kierunku ruchu wpływa na wielkość generowanych liczb

A**Baseline****Head-turning condition****B**

SNARC (DEHAENE I WSP., 1993)

- *Spatial Numerical Association of Response Codes* (Zależność przestrzenna między liczbą a rodzajem odpowiedzi; Mackiewicz, 2012)
- Podejmując decyzje dotyczące liczb, osoby badane reagują szybciej na liczby o (względnie) małej wartości po lewej stronie ciała, podczas gdy na liczby o (względnie) dużej wartości, po prawej stronie
- Świadczy o analogowym charakterze reprezentacji liczb oraz o ich przestrzennym mapowaniu
- Uznawany za wskaźnik automatycznego przetwarzania wielkości liczbowej (Fias i wsp., 1996; Fias i wsp., 2001)
- Wykorzystywany także do badania wpływów kulturowych na procesy poznawcze (kierunek czytania)

SNARC

- Efekt powiązania liczb z przestrzenią ujawnia się również w zadaniach, które nie wymagają reagowania przy pomocy dwóch rąk:
 - reakcje dwoma palcami jednej ręki (Vuillemier i wsp., 2004)
 - reakcje nogami (Schwartz i Muller, 2006)
 - kierunek ruchów sakkadowych (Fischer i wsp., 2004)
 - wskazywanie palcem (pointing task; Fischer, 2003)
 - mimowolne (?) przenoszenie uwagi orientacyjnej (Fischer i wsp. 2003)

CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA EFEKT SNARC

SNARC występuje u około 70% osób badanych i proporcja ta jest stała (Wood i wsp., 2008; również na gruncie polskim Cipora i wsp., 2009; Cipora i Nuerk, 2013)

- Kierunek czytania (np. Zebian, 2005; Shaki i wsp. 2009)
- Sposób liczenia na palcach (Fischer, 2008)
- Manipulacje eksperymentalne (Batchold i wsp., 1998; Fischer i wsp., 2009)
- Czas reakcji - dłuższe RT - silniejszy SNARC (Gevers i wsp., 2006; Wood i wsp., 2008), ale tylko we właściwym zadaniu (Hoffman i wsp., 2013; niniejsze badanie)
- Wiek - prawdopodobnie utrwalenie mapowania przestrzennego i osłabienie mechanizmów hamowania nieodpowiedniej reakcji (Wood i wsp., 2008)
- Ale wpływ wieku pozostaje nawet gdy kontroluje się sprawność hamowania i ogólny RT (Hoffman i wsp., 2013)
- Sprawność hamowania (Hoffmann i wsp. 2014) - ale tylko wtedy gdy hamowanie dotyczy znaczenia bodźca (Stroop), a nie jego przestrzennej lokalizacji (Simon)
- Płeć: silniejszy efekt u mężczyzn (Bull i wsp., 2013)

KOMPETENCJE MATEMATYCZNE

SNARC A KOMPETENCJE MATEMATYCZNE

- U osób o wyższym poziomie kompetencji matematycznych efekt SNARC jest słabszy (Dehaene i wsp., 1993; Fischer i Rottman, 2005)
- Efekt cytowany w innych pracach (Schneider i wsp., 2009; Fischer i wsp., 2010)

DLACZEGO (EWENTUALNA) RÓŻNICA NIE OSIĄGNEŁA ISTOTNOŚCI STATYSTYCZNEJ?

- Za mała moc:
 - Zbyt mało powtórzeń
 - Za mała próba
- Zły dobór próby - brak obiektywnego pomiaru kompetencji matematycznych?

CO WIEMY O „DRUGIM KOŃCU” KONTINUUM UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNYCH

- Większość badań skoncentrowana na osobach z trudnościami w matematyce
- Osoby o wysokim poziomie umiejętności matematycznych osiągnęły stadium operacji formalnych, którego nie osiąga cała populacja (por. Haan, 1977)
- Wysokie IQ - 50% wariacji osiągnięć matematycznych wyjaśnia inteligencja ogólna (por. Wu et al. 2012)
- Zdolności obliczeniowe - głównie efektem intensywnego treningu + wytrenowana w domenie WM
- Różnice w zakresie szeregu cech osobowości w stosunku do populacji ogólnej (Fehr i wsp., 2010)

UMIĘTNOŚCI MATEMATYCZNE A ELEMENTARNE PRZETWARZANIE LICZB

- Lepsze dopasowywanie liczebności zbiorów do liczb w zapisie arabskim (Castronovo i Goebel, 2012)
- Ale w zadaniach na porównywanie liczebności brak związku (Wu et. al. 2012)
- Zdolności do szacowania korelują z wynikami SAT z matematyki (Hanson i Hogan, 2000).

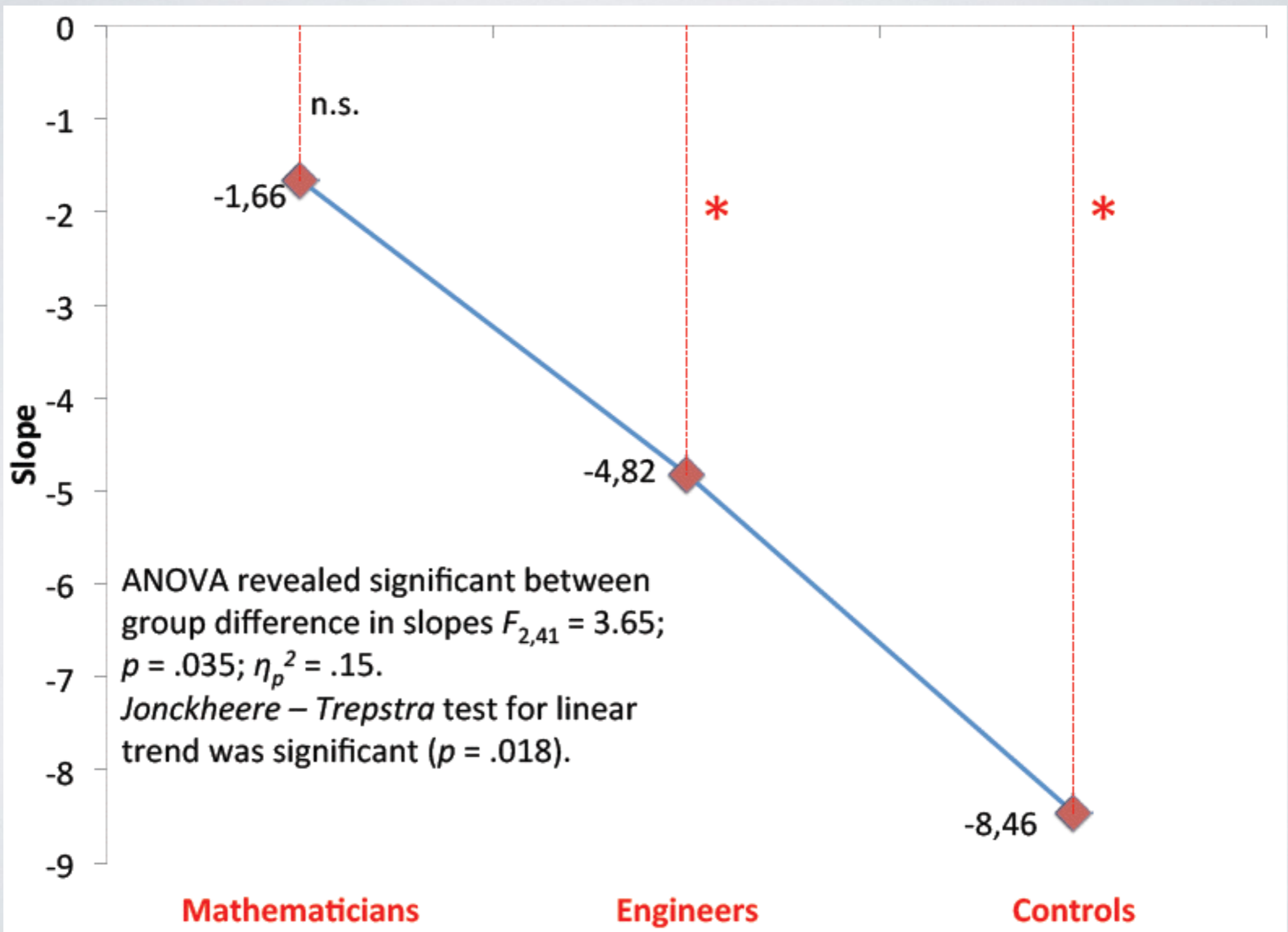
PRAWDZIWY EKSPERCI

- Bardzo mało badań
- Jeden z nielicznych wyjątków (Dowker, 1992)
 - Badanie matematyków (poziom Brytyjskiej Akademii Nauk)
 - Porównanie z zawodowymi księgowymi z długim stażem
 - I z grupą kontrolną
- Szacowanie wyników mnożenia liczb wielocyfrowych
- Matematycy - bardziej poprawni, strategie bardziej różnorodne, większa elastyczność w stosowaniu strategii
- Dane introspekcyjne (m.in Penrose, 1989) rozwiązywanie problemów matematycznych nie opiera się tylko na wykorzystaniu algorytmów. Ale tu też duże zróżnicowanie między matematykami

METODA

- Osoby badane (N = 44, wyrównana proporcja płci w grupach, praworęczni)
 - Zaawansowani doktoranci (otwarty przewód doktorski)
 - Matematyka
 - Kierunki ściśle wykorzystujące matematykę
 - Grupa kontrolna - nauki społeczne i humanistyczne
- Materiały i aparatura:
 - zadanie oceny parzystości, standardowe

WYNIKI SNARC



SLOPE CZYLI JAK ZMIERZYĆ EFEKT SNARC

- Dla każdej osoby badanej dla każdej liczby obliczamy różnice: $RT(\text{prawa ręka}) - RT(\text{lewa ręka})$ - tzw. dRT
- Dopasowujemy metodą najmniejszych kwadratów linię regresji, gdzie zmienną zależną jest dRT a predyktorem wielkość liczby
- Niestandaryzowany współczynnik kierunkowy linii regresji (slope) traktujemy jako miarę efektu SNARC
- Można go interpretować jako zmianę w dRT gdy wartość liczby zmienia się o 1.
- Im bardziej ujemne wartości slope tym silniejszy efekt SNARC
- W próbie - test t dla pojedynczej próby - porównanie slope'ów z wartością 0