Artykuł ukazał się w „Logos i Ethos" 2_(27)_2009, ss. 25–42, ISSN 0867-8308.

**Wojciech P. Grygiel, Mateusz Hohol**

# Teoriopoznawcze i kognitywistyczne wyzwania matematycznego platonizmu

*(…) wierzenie, że intuicja może zastąpić rozum jest zabobonem. Powodem sukcesów tego zabobonu jest z jednej strony przesadny nacisk położony na rozumowanie przez niektórych racjonalistów, z drugiej po prostu lenistwo. Chce się za pomocą intuicji uniknąć trudnej pracy wnioskowania, kontrolowania rozumowań, itd. Co nie przeszkadza, że chodzi o zabobon.*

Józef Maria Bocheński, *Sto zabobonów*[1]

## Uwagi wstępne

Platonizm matematyczny, zakładający obiektywne istnienie bytów matematycznych, jest współcześnie jednym z głównych stanowisk w filozofii matematyki. Stanowisko to wiąże się z praktyką badawczą wielu matematyków, którzy uważają, że badany przez nich przedmiot nie jest wytworem umysłu, ale odnosi się do istniejącej samodzielnie rzeczywistości[2]. Wśród platonizujących matematyków wyróżnić należy m.in. Georga Cantora, Kurta Gödla i Rogera Penrose'a, których poglądy filozoficzne rzutują na kierunki rozstrzygania przez nich problemów naukowych, co jest swego rodzaju dowodem na heurystyczną płodność tego stanowiska filozoficznego. Za platonizmem przemawia również w pewien sposób „argument z autorytetu", ponieważ wątki platońskie znaleźć można u Wernera Heisenberga, Alberta Einsteina, Johna Barrowa, Michała Hellera i wielu innych uczonych.

Platonizm jest głównie poglądem ontologicznym, to jest zajmującym określone stanowisko w sprawie natury obiektów matematycznych i sposobu ich istnienia. Kwestie epistemologiczne, takie jak pytanie o dostęp poznawczy do świata bytów matematycznych, są

[1] J. Bocheński, *Sto zabobonów*, Kraków: Philed 1994, s. 62.

[2] Mieć na uwadze należy cały czas, iż platonizm matematyczny, wyrażający obiektywność przedmiotu badań matematyki, odnosi się dość luźno do poglądów na matematykę, jakie głosił sam Platon.

najczęściej przez platoników pomijane lub sprowadzane do istnienia władzy umysłu odpowiedzialnej za bezpośrednie (niedyskursywne) poznanie matematyczne. Taką władzą ma być wedle Gödla *intuicja*[3] lub *wgląd* („widzenie”) u Penrose’a[4]. Od czasu Koła Wiedeńskiego wytłumaczenia odwołujące się do intuicji traktowane są jako nieprawomocne. Zarzuca się im psychologizm oraz brak obiektywizacji wiedzy. Powołanie się na *intuicję matematyczną* wydaje się również epistemologicznie nieoszczędne, gdyż postuluje istnienie dodatkowych, poza zwykłą percepcją zmysłową, władz poznawczych. Jeśli platonizm matematyczny ma być rozwiniętą teorią filozoficzną, a nie tylko dogmatyczną deklaracją filozofujących matematyków, musi wypowiadać się on sensownie nie tylko w kwestiach ontologicznych, lecz również teoriopoznawczych.

Celem niniejszej pracy jest zarysowanie problematyki epistemologicznej we współczesnym platonizmie matematycznym ze szczególnym uwzględnieniem poznawalności świata obiektów matematycznych oraz możliwych dróg poznawczego dostępu do tego świata. Już na samym początku zaznaczyć należy, że rozstrzygnięcie wielu kwestii teoriopoznawczych związanych z filozofią matematyki jest zależne od przyjęcia określonego modelu umysłu. Współczesna nauka nie stworzyła bowiem jeszcze jednoznacznej teorii umysłu, na której oprzeć można by teorię poznania matematycznego.

## Założenia ontologiczne, metodologiczne i epistemologiczne platonizmu matematycznego (Gödel, Penrose)

Choć platonizm matematyczny nie jest koncepcją jednorodną, można wskazać pewne cechy, które występują u większości entuzjastów tej filozofii matematyki. Za przykład w tym zakresie posłużyć mogą poglądy „wzorcowych” platoników, takich jak Kurt Gödel i Roger Penrose. Wedle platoników obiekty matematyczne są odkrywane, a nie tworzone przez umysły matematyków, dlatego też twierdzą oni, że człowiek jest obserwatorem lub odkrywcą, nie zaś konstruktorem matematyki. Byty matematyczne nie są subiektywnym wytworem matematyków, ale odnoszą się do obiektywnie istniejącej rzeczywistości. Byty te istnieją poza czasem i przestrzenią, co stawia je w analogii ze światem wiecznych *form* (*idei*) Platona. Matematyczne idee są niezależne od świata materialnego. Wielu platoników, jak np. Roger Penrose uważa wręcz, że świat fizyki jest strukturą emergentną w stosunku do świata matematyki:

---

[3] Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, Warszawa: PWN 2001, s. 142.
[4] Zob. np. R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*, tłum. P. Amsterdamski, Warszawa: PWN 2000, s. 122.

> Świat fizyczny wyłania się z („pozaczasowego") świata matematyki (…). Jedną z zadziwiających cech zachowania świata stanowi jego nadzwyczajna zgodność z prawami matematycznymi. Im lepiej rozumiemy świat fizyczny, im głębiej poznajemy prawa natury, tym bardziej wydaje się nam, że świat fizyczny gdzieś wyparowuje i pozostaje nam tylko matematyka. Im głębiej rozumiemy prawa fizyki, tym dalej wkraczamy w świat matematyki i matematycznych pojęć[5].

Pogląd taki znajduje swe miejsce w pluralistycznej ontologii Penrose'a, która zakłada współistnienie trzech światów: *platońskiego świata matematyki*, *świata fizyki* i *świata umysłu*[6]. Kurt Gödel przyznawał bytom matematycznym (w szczególności zbiorom) równie uprawnioną realność jak obiektom fizycznym:

> Pojęcia i klasy mogą być traktowane jako rzeczywiste obiekty: klasy jako „wielości rzeczy", zaś pojęcia jako własności rzeczy i relacje pomiędzy rzeczami istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. Wydaje mi się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych[7].

Ważnym założeniem platoników matematycznych, a wśród nich Penrose'a w szczególności, jest absolutny charakter *prawdy matematycznej*, co wiąże się przede wszystkim z relacjami pomiędzy bytami matematycznymi. Prawda matematyczna jest niezależna od matematyków i wiedzy o matematycznym uniwersum.

Zagadnienie *prawdy* i poznania bytów matematycznych prowadzi ku refleksji teoriopoznawczej. Odkrycie prawdy matematycznej możliwe jest dzięki *wglądowi* umysłu w świat idei matematycznych, co związane jest, jak przekonuje Penrose, z koniecznością *rozumienia*, a więc z semantyką operacji wykonywanych przez matematyka. Osiągnięcie prawdy matematycznej, jak chcieliby formaliści, nie jest możliwe na gruncie algorytmicznych manipulacji na niezinterpretowanych symbolach. Penrose argumentuje za takim poglądem, posługując się twierdzeniem Gödla, które mówi, że w każdym dostatecznie bogatym, czyli zawierającym arytmetykę, systemie formalnym znajdować będą się zawsze poprawne pod względem syntaktycznym zdania, co do których nie da się przeprowadzić dowodu na gruncie aksjomatów tegoż systemu. Matematyk zna jednak wartość logiczną tych zdań, a więc wie, że

[5] R. Penrose i in. *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, tłum. P. Amsterdamski, Warszawa: Prószyński i S-ka 1997, s. 18-19.

[6] R. Penrose, *Droga do rzeczywistości*, tłum. J. Przysława, Warszawa: Prószyński i S-ka 2006, s. 17 n.

[7] Cyt. za: K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Kraków-Tarnów: OBI-Biblos 2002, s. 20.

są prawdziwe, gdyż jest zdolny do *refleksji* nad aksjomatami, regułami dowodzenia itd.[8]. Mówiąc krótko, matematyk nie tylko liczy jak komputer, ale też *rozumie*, co robi. Penrose porównuje poznanie *prawdy matematycznej* do „widzenia" przez umysł obiektów ze *świata platońskiego*:

> Wyobrażam sobie, że ilekroć umysł postrzega matematyczne pojęcie, styka się z platońskim światem idei: Gdy ktoś „widzi" prawdę matematyczną, jego świadomość dociera do świata idei i nawiązuje z nim bezpośredni kontakt – świat ten staje się dlań dostępny za pośrednictwem intelektu (…). Rozmowa między matematykami jest możliwa, ponieważ obaj mają bezpośredni dostęp do prawdy; świadomość każdego z nich może bezpośrednio postrzegać matematyczne prawdy dzięki temu procesowi „widzenia"[9].

Gödel mówi natomiast o istnieniu intelektualnej *intuicji*, która odpowiedzialna jest za bezpośrednie poznanie matematyczne. Intuicja ta ma być swoistą władzą umysłu, która umożliwia refleksję nad obiektami matematycznymi, takimi, jak np. zbiory:

> Mamy coś w rodzaju percepcji obiektów teorii mnogości, co widać z faktu, że aksjomaty narzucają się nam jako prawdziwe. Nie widzę powodu, aby mieć mniej zaufania do tego rodzaju percepcji, tj. do intuicji matematycznej, niż do percepcji zmysłowej, która pozwala nam budować teorie fizyczne, w oczekiwaniu, że przyszłe dane zmysłowe będą z nią zgodne[10].

Mówiąc o zbiorach w kontekście platonizmu matematycznego, mamy na myśli przede wszystkim zbiory w rozumieniu dystrybutywnym, czyli takie, jakimi zajmuje się teoria mnogości. Pytanie o sposób ich istnienia odnawia starożytny i średniowieczny spór o uniwersalia[11]. Warto zauważyć również, że przyjęcie platonizmu wiąże się także z konsekwencjami metodologicznymi. W przeciwieństwie do intuicjonistów, platonicy dopuszczają dowody *niekonstruktywne*, które opierają się na zasadzie wyłączonego środka (*tertium non datur*)[12]. Jak zaznaczone było na wstępie, uzasadnienie poznania matematycznego za pomocą intuicji spotyka się z krytyką. Poniżej przedstawione zostaną

[8] R. Penrose, *Nowy umysł cesarza*…, s. 132.

[9] Tamże, s. 459.

[10] Cyt. za: K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny*…, s. 60.

[11] Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki*…, s. 177 n. Stanowisku realistów (Platon, Arystoteles) odpowiada w filozofii matematyki logicyzm połączony przeważnie z platonizmem matematycznym (Bertrand Russell, Gottlob Frege), konceptualizmowi odpowiada intuicjonizm (Luitzen E. J. Brouver, Arend Heyting), a nominalizmowi (Wilhelm Ockham) – formalizm (David Hilbert).

[12] Zob. np. K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny*…, s. 35.

zarzuty, jakie przeciwnicy takiego sposobu poznania bytów matematycznych stawiają platonizmowi.

## Krytyka poznania matematycznego jako intuicyjnego „widzenia"

Pisząc o bezpośrednim wglądzie w świat matematyki, Roger Penrose ma na myśli źródłową, pojęciowo niezapośredniczoną formę poznania, związaną ze swego rodzaju *doświadczeniem matematycznym*. Próbując ją potocznie zilustrować, Józef Życiński przytacza historię spaceru Penrose'a z Ivorem Robinsonem, który „zaowocował" intuicją, a wkrótce potem formalizacją pojęcia przestrzeni pułapkowej w fizyce czarnych dziur[13]. Takie ujęcie odkrycia matematycznego, opisywanego także przez innych uczonych (np. Henri Poincare), spotyka się jednak ze zdecydowaną krytyką. Przykładowo, John Barrow twierdzi, że odkrycia matematyczne dokonywane są w trakcie skomplikowanych obliczeń, które odbywają się w skupieniu i z pełnym udziałem świadomości matematyka[14]. Opis matematycznego odkrycia jako natychmiastowego „widzenia" struktur matematycznych wydaje się być mętny i niekonkretny. Krzysztof Śleziński zwraca uwagę na to, iż gdyby „widzenie" matematycznego uniwersum było zjawiskiem powszechnym, to najprawdopodobniej nie byłoby tylu kontrowersji wobec filozofii matematyki o nachyleniu platońskim[15].

Przyjrzyjmy się teraz zarzutom bardziej „technicznym". Wyjaśnienia domaga się związek, który zachodzi pomiędzy bytami fizycznymi, jakimi są matematycy, a abstrakcyjnymi obiektami matematycznymi, usytuowanymi poza czasem i przestrzenią. Paul Benacerraf twierdzi, że byty abstrakcyjne nie mają mocy oddziaływania przyczynowego ze zlokalizowanymi czasoprzestrzennie bytami fizycznymi[16]. Przyjmując za Alvinem Goldmanem tzw. *kauzalną teorię wiedzy*[17], Benacerraf uważa, że skoro nie ma związku przyczynowego pomiędzy abstrakcyjnym światem matematyki a konkretnymi matematykami, to wiedza o świecie matematycznym nie jest w ogóle możliwa. Zgodnie z kauzalną teorią wiedzy, aby możliwa była jakakolwiek wiedza, konieczne jest zaistnienie związku kauzalnego pomiędzy faktem a mniemaniem o tym fakcie. Na problematyczność poznania bytów abstrakcyjnych przez byty konkretne uwagę zwraca również kilku innych filozofów

[13] J. Życiński, *Nieobliczalny wszechświat Penrose'a*, w: tenże, *Granice racjonalności. Eseje z filozofii nauki*, Warszawa: PWN 1993, s. 223-224.

[14] Zob. np. J. Barrow, Π *razy drzwi. Szkice o liczeniu, myśleniu i istnieniu*, tłum. K. Lipszyc, Warszawa: Prószyński i S-ka 1996, s. 390.

[15] K. Śleziński, *Elementy platonizmu u Rogera Penrose'a*, Kraków: PAT 1999, s. 253.

[16] Zob. np. P. Benacerraf, *Mathematical Truth*, w: P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press 1983, s. 403-420.

[17] A. Goldman, *A Causal Theory of Knowing*, „Journal of Philosophy", vol. 64 (1967), s. 357-372.

matematyki o nachyleniu antyplatońskim, takich jak Charles Chihara[18] czy Hartry Field[19]. Z punktu przyczynowej teorii wiedzy trudno jest więc argumentować za poglądem, że *intuicja matematyczna* może być prawomocnym źródłem wiedzy matematycznej. Z drugiej strony jednak Adam Grobler uważa wykluczenie wiedzy matematycznej przez kauzalną teorię wiedzy za ewidentną słabość samej tej teorii[20]. W obronie intuicji matematycznej szukać by można zatem innej teorii wiedzy. Zadanie takie spełnić mogłaby tzw. *warunkowa teoria wiedzy*[21] (*conditional theory of knowledge*) Roberta Nozicka, która to związek przyczynowy pomiędzy faktem a mniemaniem o nim zastępuje abstrakcyjnym związkiem logicznym[22]. Taka teoria jednak niesie za sobą również pewne trudności[23].

**Problemy epistemologiczne w filozofii matematyki a filozofia umysłu**

Można zaryzykować twierdzenie, że akceptacja bądź odrzucenie możliwości intuicyjnego poznania obiektów matematycznych w znacznym stopniu zależy od przyjętego modelu umysłu. Rozważana problematyka epistemologiczna w platonizmie matematycznym wiąże się bowiem z problemem *mind-body*, traktowanym w ramach filozofii umysłu. W uproszczonym podejściu można sensownie oczekiwać, iż zwolennicy poznania bezpośredniego (intuicyjnego) przyjmować będą kartezjański dualizm, w którym to umysł (*res cogitans*) i ciało (*res extensa*) stanowią dwie odrębne substancje[24]. Poznanie (w tym matematyczne) oraz szerzej pojęte *myślenie* są atrybutami *res cogitans*, która nie jest bytem czasoprzestrzennym. Metafora myślenia jako „widzenia oczyma duszy" przeszła, dzięki Kartezjuszowi, do tradycji filozofii nowożytnej. W ten sposób problem *wglądu* bytu czasoprzestrzennego w świat abstrakcyjnych obiektów matematycznych i ograniczenia kauzalnej teorii wiedzy *pozornie* nie istnieją, gdyż sam umysł jest obiektem abstrakcyjnym. Łatwo spostrzec tutaj jedynie przesunięcie problemu, ponieważ trudność relegowana zostaje do kwestii oddziaływania niematerialnej substancji myślącej na materialne ciało. Z drugiej strony zaś jeśli przyjmie się stanowisko materialistyczne, *eliminujące* umysł (np. Patricia

[18] Zob. np. C. Chihara, *A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? And Can Perceive Them?*, „Philosophical Review", vol. 91 (1982), 211-227.

[19] Zob. np. H. Field, *Realism and Anti-Realism about Mathematics*, „Philosophical Topics", vol. 13 (1982), s. 45-69.

[20] A. Grobler, *Pojęcie wiedzy*, w: tenże, *Epistemologia*, <http://adam-grobler.w.interia.pl/Teoriapoznania.html>.

[21] Adam Grobler proponuje, aby *conditional theory of knowledge* tłumaczyć jako „gdybaniowa teoria wiedzy"; zob. tamże.

[22] Zob. np. R. Nozick, *Philosophical Explanations*, Cambridge: Belknap Press 1981.

[23] W warunkowej teorii wiedzy niejasne są warunki prawdziwości dla nierzeczywistych okresów warunkowych. zob. A. Grobler, *Pojęcie wiedzy*….

[24] Kartezjusz, *Medytacje o filozofii pierwszej*, tłum. J. Hartman, Kraków: Zielona Sowa 2006, s. 69 n.

Churchland) lub takie, w którym umysł i ciało są *identyczne* (np. Herbert Feigl)[25], to poznanie inne niż zmysłowe odbywające się pomiędzy obiektami konkretnymi (zlokalizowanymi czasoprzestrzennie) faktycznie nie jest możliwe[26]. Stanowisko naturalistyczne, na gruncie filozofii umysłu bliższe materializmowi, przyjmuje wspomniany już wcześniej Chihara, który upatruje intersubiektywności wiedzy matematycznej w podobieństwie biologicznym matematyków, a nie w istnieniu intuicyjnie poznawalnej abstrakcyjnej dziedziny obiektów matematycznych[27].

Takiemu dychotomicznemu ujęciu, w którym dualiści uznawaliby intuicję matematyczną za prawomocną, a materialiści nie, sprzeciwiają się jednak koncepcje naukowe i filozoficzne Rogera Penrose'a. Jeśli chodzi bowiem o ontologię, Penrose jest faktycznie pluralistą (wspomniane wcześniej współistnienie trzech światów), lecz jeśli chodzi o problematykę *mind-body*, zajmuje stanowisko fizykalistyczne. Penrose uważa bowiem, że świat umysłu jest emergentny wobec świata fizycznego na mocy ścisłych, niealgorytmicznych praw fizyki[28]. Dziwi jednak fakt, iż pomimo proponowanego przez siebie fizycznego modelu umysłu i poszukiwania praw przyrody odpowiedzialnych za świadomość, nie zajmuje się prawie w ogóle problemem dostępu poznawczego do wyróżnionego przez siebie świata matematyki, zadowalając czytelników jedynie nieostrym pojęciem *wglądu*.

## Czy od strony teoriopoznawczej platonizm matematyczny da się jednak obronić?

Zaprezentowane dotychczas rozważania pokazują, iż stosowanie terminu *intuicja matematyczna* (i pokrewnych) jest kłopotliwe, wikła w psychologizm i jest obarczone wieloma nieścisłościami. Rozwiązania tego problemu można poszukiwać wykorzystując trzy następujące strategie postępowania: (1) uznać intuicję matematyczną w nowożytnym (kartezjańskim) rozumieniu, za prawomocne źródło wiedzy (fenomenologia, hermeneutyka); (2) zanegować istnienie intuicji matematycznej albo wskazać, że wyjaśnienie poznania matematycznego nie wymaga stosowania tej kategorii, nie negując przy tym realizmu

[25] Zob. np. J. Bremer, *Materializm redukcjonistyczny*, w: tenże, *Problem umysł-ciało*, Kraków: WAM 2001, s. 82-114.

[26] Nie chcemy oczywiście powiedzieć, że przytoczone stanowiska (*materializm eliminatywistyczny* i *teoria identyczności typów*) w gruncie rzeczy mówią o tej samej koncepcji umysłu. Twierdzimy jedynie, że przyjęcie każdego z nich wywołuje te same konsekwencje w kwestiach teoriopoznawczych związanych z matematyką.

[27] C. Chihara, *A Gödelian Thesis Regarding Mathematical Objects…*.

[28] Zob. np. W. P. Grygiel, M. Hohol, *Rogera Penrose'a kwantowanie umysłu*, „Filozofia Nauki" 3 (2009), s. 5-31.

matematyki (niektórzy strukturaliści i *quasi*-empiryści matematyczni) i (3) wykorzystać osiągnięcia współczesnych neuronauk do zbadania zasadności intuicji matematycznej.

*Ku apriorycznej prawomocności intuicji*

Filozofią, która nie widzi problemu w braku związku kauzalnego między bytami abstrakcyjnymi a konkretnymi i jednocześnie uznaje kategorię intuicji za prawomocną, jest niewątpliwie *fenomenologia*. Warto wspomnieć, że sam Kurt Gödel znał i cenił dzieła Edmunda Husserla. Gödel uważał, że redukcja ejdetyczna stosowana przez fenomenologów może być dobrym „narzędziem" w postrzeganiu obiektów matematycznych. Pamiętać należy jednak, na co uwagę zwraca Wójtowicz, że realistyczne nastawienie Gödla poprzedzało lektury Husserla i jego zainteresowanie fenomenologią[29]. Innym przykładem stosowania na gruncie filozofii matematyki terminów bliższych filozofii „humanistycznej" jest *epistemologiczny platonizm hermeneutyczny*, opisywany przez Zbigniewa Króla, który to analizuje obiekty matematyczne jako składowe fundamentalnej sytuacji *bycia-w-świecie*[30]. Intuicja intelektualna jest popularną kategorią we współczesnej filozofii. Chętnie powoływali się na nią myśliciele tacy jak Max Scheler czy Henri Bergson, którego poglądy stanowiły reakcję na neopozytywizm. Stanowiska te nie wyjaśniają jednak, skąd w ogóle bierze się intuicja matematyczna, nawet jeśli mówienie o niej jest prawomocne.

Ciekawym przykładem wykorzystania w filozofii matematyki *intuicji w jej odmianie empirycznej* jest koncepcja *platonizmu fizykalistycznego* stworzona przez Penelope Maddy[31]. Uważa ona, że możemy poznać tylko zbiory konkretnych, czyli postrzegalnych zmysłowo elementów. Zbiory wedle niej są zlokalizowane czasoprzestrzennie, a poznajemy je przez poszczególne obiekty fizyczne, z których się one składają. Zamiast na abstrakcyjny świat idei matematycznych, intuicja nakierowana jest tutaj na konkretny przedmiot fizyczny, za którego postrzeganie odpowiada *percepcja zmysłowa*. W ten sposób mamy dostęp poznawczy tylko do prostych zbiorów, a więc takich, których liczba elementów jest skończona. Zbiory nieskończone traktowane są przez Maddy jak obiekty teoretyczne, których istnienie postulują nauki przyrodnicze[32].

[29] K. Wójtowicz, *Platonizm matematyczny…*, s. 64 n.
[30] Z. Król, *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Warszawa: IFiS PAN 2006, s. 169 n.
[31] Zob. np. P. Maddy, *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press 1990.
[32] R. Murawski, *Filozofia matematyki…*, s. 165.

*Intuicja wyeliminowana*

Inną strategią jest eliminacja pojęcia intuicji z obszaru filozofii matematyki. Na korzyść tej strategii przemawia niewątpliwie *oszczędność* ontologiczna. O ile istnieje pewna pokusa, aby stanowisko Maddy potraktować jako swoistą odmianę arystotelizmu, o tyle koncepcja *fizyzmu*, wysunięta przez francuskiego fizyka, Rolanda Omnésa, wydaje się wręcz być współczesnym odpowiednikiem umiarkowanego realizmu w sporze o uniwersalia. Na zasadzie analogii do *logicyzmu* Omnés twierdzi, iż prawa matematyki redukowalne są do praw fizyki. Innymi słowy, dostęp do struktur matematycznych odbywa się poprzez ich wyabstrahowanie ze struktur świata fizycznego[33]. Postulowana przez platoników intuicja, zapewniająca dostęp do obiektów matematycznych jest tutaj zastąpiona przez abstrakcję, polegającą na aspektowym ujęciu treści poznawanego przedmiotu.

Bez pojęcia intuicji matematycznej obyć mogą się także przedstawiciele strukturalizmu w filozofii matematyki, tacy jak np. M. Resnik[34]. Stanowisko to zakłada, że matematyka jest nauką o *strukturach*. Pojedyncze byty matematyczne, które mają relacyjną naturę, bada się wedle strukturalistów jako pozycje w strukturach. Resnik twierdzi, że nie ma żadnej specjalnej władzy umysłu (np. intuicji), która pozwalałaby badać (ujmować) struktury. Poznanie matematyczne odbywa się według niego przez przejście odpowiedniej liczby kroków, kiedy wiedza powiększana jest w coraz bardziej abstrakcyjnych terminach. Strukturalizm, na co uwagę zwraca Michał Heller, może być interpretowany zarówno na korzyść platonizmu (jak w przypadku Resnika), jak i nominalistycznie (np. Stewart Shapiro)[35].

Innym przykładem odrzucenia intuicji jest *quasi*-empiryczna filozofia matematyki Willarda van Ormana Quine’a. Filozof ten neguje podział zdań na syntetyczne i analityczne, co prowadzi do przekonania, że prawdziwość przysługuje tylko całym teoriom fizycznym łącznie z formalizmem matematycznym (holizm)[36]. Quine nie rozróżnia sposobów istnienia dla różnych obiektów, takich jak np. istnienie rzeczowe (ciała fizyczne) i idealne (byty matematyczne). Obiekty te różnią się od siebie własnościami, nie zaś sposobem istnienia. Problem istnienia zostaje przez niego przeniesiony z gruntu substancjalnego na grunt semantyczny. Twierdzi on, że istnieją te i tylko te obiekty, o których teoria mówi, że istnieją:

---

[33] R. Omnés, *Converging realities: Towards a Common Philosophy of Physics and Mathematics*, Princeton-Oxford: Princeton University Press 2005. Zob. także W. P. Grygiel, *Fizyzm Rolanda Omnesa – jedność świata matematyki i fizyki*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XLIII (2008), s. 89.

[34] Zob. np. M. Resnik, *Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology*, „Nous” 16 (1982), s. 95-105.

[35] M. Heller, *Filozofia nauki*, Kraków: Petrus 2009, s. 95.

[36] Zob. np. W. v. O. Quine, *Dwa dogmaty empiryzmu*, w: tenże, *Z punktu widzenia logiki*, tłum. B. Stanosz, Warszawa: PWN 2000, s. 35-70

*Być, to znaczy być wartością zmiennej* [kwantyfikowanej – M. H.; W.G.][37]. Zgodnie z tym istnienie obiektów matematycznych i fizycznych jest orzekane według podobnych kryteriów. Ważnym elementem filozofii Quine'a jest tzw. *argument z niezbędności*: matematyka jest niezbędną częścią teorii fizycznych, więc jeśli przyjmujemy realizm w odniesieniu do obiektów fizycznych postulowanych przez teorię, to powinniśmy również przyjąć realizm w odniesieniu do obiektów matematycznych występujących w tej teorii[38]. Co do bytów matematycznych, które zawierają teorie fizyczne kryterium prawdziwości jest jasne – albo cała teoria jest prawdziwa wraz z formalizmem, albo cała teoria jest fałszywa. Quine nie podchodzi do matematyki instrumentalnie, jak członkowie Koła Wiedeńskiego, którzy odmawiali jej statusu nauki[39]. Wartość logiczna przysługuje wedle Quine'a całym teoriom naukowym jako najmniejszym „atomom” poddającym się weryfikacji. Zgodnie z tym *prawdziwość* formalizmu matematycznego może być orzekana jedynie w kontekście całej teorii fizycznej.

Problematyczny pozostaje jednak status poznawczy „czystej matematyki”, czyli takiej, która nie ma zastosowań w teoriach nauk przyrodniczych. Przykładowo, we wspominanej ontologii Penrose'a jest to ta część świata matematyki, która nie konstytuuje świata fizycznego. Stwierdzenie, że kryteria uznania teorii matematycznych za prawdziwe lub fałszywe są podobne do tych, jakie stosowane są w naukach empirycznych, wcale nie musi oznaczać rezygnacji z pewności matematyki, jak uważał Imre Lakatos[40]. Filozof ten twierdził, że matematyka rozwija się metodą prób i błędów – dowodom towarzyszą kontrprzykłady (tak jak w naukach empirycznych), z czego wysunął tezę, że jest ona nauką omylną i niepewną[41]. Rachunek różniczkowy stworzony niezależnie przez Newtona i Leibniza zawierał w sobie sprzeczności i był ulepszany m.in. przez Bolzano i Weierstrassa. Nie można powiedzieć zatem, że został odkryty w jednorazowym „przebłysku” intuicji. Mimo sprzeczności był jednak doskonałym, rzeczywiście rewolucyjnym narzędziem pozwalającym trafnie opisywać przyrodę. Podobnie rozwój teorii strun w fizyce zaowocował stopniowym, ale konsekwentnym wykształceniem się bardzo bogatych idei matematycznych, takich jak chociażby przestrzenie Calabi-Yau[42]. Rozwój naszej wiedzy matematycznej (nie zawsze

[37] W. v. O. V. Quine, *O tym, co istnieje*, w: tenże, *Z punktu widzenia logiki*, s. 34.
[38] Zob. np. K. Wójtowicz, *Wokół problemu realizmu teoriomnogościowego*, „Filozofia Nauki” 4 (1995), s. 113-130.
[39] A. Grobler, *Metodologia nauk*, Kraków: Aureus-Znak 2008, s. 210.
[40] Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki…*, s. 152.
[41] Zob. np. I. Lakatos, *Dowody i refutacje. Logika odkrycia matematycznego*, tłum. M. Kozłowski, K. Lipszyc, Warszawa: Tikkun 2005.
[42] Poglądową wzmiankę na temat przestrzeni Calabi-Yau znaleźć można w: B. Green, *Piękno Wszechświata: superstruny, ukryte wymiary i poszukiwanie teorii ostatecznej*, tłum. E. Łokas, B. Bieniok, Warszawa: Prószyński i S-ka 2001, s. 208-210.

kumulacyjny) nie przekreśla wcale obiektywności przedmiotu tej wiedzy. Uznanie matematyki za naukę rozwijającą się metodą domysłów i ich obaleń wcale nie musi oznaczać rezygnacji z realistycznego traktowania matematyki. Wszakże ciągła próba rewizji teorii, także matematycznych tylko wzmacnia ich pewność. Uznanie, że odkrywamy platońskie uniwersum obiektów matematycznych nie za pomocą zawsze trafnej i natychmiastowej intuicji, ale metodą prób i błędów, wcale nie oznacza zanegowania jego istnienia.

*W świetle nauk kognitywnych*

Ostatnia z propozycji rozwiązania kwestii intuicji matematycznej i jej prawomocności jako władzy poznawczej sięga do nauk o mózgu (*neuroscience*). Nie ulega bowiem wątpliwości, iż biologiczna struktura mózgu odgrywa istotną rolę w procesie ludzkiego poznania, w tym poznania matematycznego. Z czysto zjawiskowych badań w obszarze psychologii i nauk o mózgu wiadomo, że poznanie matematyczne, które rozpoczęte jest świadomie, w dużej części przebiega dalej poza świadomością matematyka, a nawet niezależnie od jego woli[43]. Ważnym głosem w kwestii istnienia intuicji matematycznej jest wrodzony charakter *intuicji mnogości*[44]. Należy rozpatrywać ją jako ewolucyjne dziedzictwo człowieka i wielu zwierząt. Inną przesłanką za istnieniem intuicji matematycznej jest tzw. *zmysł liczby*, o którym pisze Stanislas Dehaene[45]. „Zmysł" ten posiada szeroką autonomię, ale skorelowany jest z innymi zmysłami, w szczególności ze zmysłem wzroku. W ten sposób można próbować wytłumaczyć wyznania wielu matematyków, którzy sądzą, że poznanie matematyczne związane jest z *wglądem*, *nocznością* czy „oglądaniem" obiektów matematycznych.

Próbując naturalistycznie wyjaśnić poznanie matematyczne, warto posłużyć się osiągnięciami biologii ewolucyjnej w zakresie mechanizmów adaptacyjnego wykształcania się władz poznawczych człowieka. Panoramę ciekawych rozwiązań w tym zakresie przytacza na łamach swojej książki *Mózg a matematyka* Jacek Dębiec[46]. Zadaniem mózgu jest m.in. regulacja interakcji organizmu ze środowiskiem, a zdolność matematycznego poznania istnieje dzięki oddziaływaniom organizmu ze światem zewnętrznym[47]. Dość naturalnym poglądem wydaje się uznanie matematyki za narzędzie pozwalające porządkować (a więc

[43] Zob. np. J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, tłum. R. Molski Warszawa: WPI 1964.
[44] P. Starkey, R. Cooper, *Perception of numbers by human infants*, „Science", 210 (1980), s. 1033-1035.
[45] Zob. np. S. Dehaene, *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, London-NY-Victoria-Ontario-Auckland: Penguin Books 1999.
[46] J. Dębiec, *Mózg i matematyka*, Kraków-Tarnów: OBI-Biblos 2002.
[47] Tamże, s. 66-67.

poznawać) środowisko otaczające organizm. Jak pisze Dębiec: „Mechanizmy kierujące przekształceniami elementów «pierwotnej matematyki» mają jakąś wspólną podstawę z mechanizmami organizującymi percepcję przestrzenną”[48].

Pogląd ten wspierany jest również przez Johna Ecclesa, który twierdzi, że regularności przyrody dały podstawę dla matematycznych reprezentacji w mózgu[49]. Jak Dębiec zauważa za Dehaene’m, wiedza matematyczna posiada swoje źródło w empirii, a wynalazki numeryczne kompensują człowiekowi jego ograniczenia percepcyjne[50]. Co więcej, „cała” matematyka nie została człowiekowi „dana” jako ewolucyjne dziedzictwo – mózg może odnosić się do coraz bogatszych i coraz bardziej abstrakcyjnych struktur. O ile stwierdzenie, że „pierwotna matematyka” rozwinęła się jako adaptacja do środowiska, nie wywołuje raczej kontrowersji, problematyczna nadal pozostaje granica „przeskoku” do wyższej matematyki (np. infinitystycznej). Problem ten widzą współcześni biologowie, twierdząc, iż o ile ewolucja mózgu, jak i innych narządów podyktowana była warunkiem najlepszego przystosowania do przeżycia i rozrodu, o tyle istnieje pewna nadmiarowa (nieadaptacyjna) funkcja mózgu, pozwalająca na poznawanie abstrakcyjnych bytów matematycznych pomimo, iż w żaden sposób byty te nie uczestniczyły w procesach adaptacyjnych[51]. Przykładowo, ludzki umysł poznaje strukturę abstrakcyjnych przestrzeni Hilberta lub rozmaitości różniczkowych pomimo, iż ewolucja człowieka nie odbywała się ani na poziomie kwantowym, ani w globalnej skali Wszechświata.

Jako argument natury lingwistycznej Dębiec wskazuje na badania neurologów takich, jak np. Michael Gazzaniga, których wynikiem jest uznanie niezależności czynności matematycznych i językowych. Osoby, które w wyniku wrodzonych zaburzeń mają problemy z opanowaniem języka, często są nadzwyczaj uzdolnione matematycznie, co jest swego rodzaju przesłanką za niezależnością tych funkcji. Przykładem naukowca, który miał trudności z opanowaniem mowy w dzieciństwie, jest Albert Einstein, który cierpiał na dyslalię[52]. Poznanie matematyczne ma więc charakter w dużej mierze pozajęzykowy, a u jego podstaw tkwią wzrokowe wyobrażenia. Poza tym, jak pisze Dębiec: „Formalne równania stanowią jedynie finalny produkt tych procesów, niekonieczny do uzyskania wglądu oraz przeprowadzenia oceny prawdziwości danej struktury matematycznej”[53].

---

[48] Tamże, s. 85.
[49] Zob. np. J. Eccles, *Evolution of the Brain*, London-New York: Routledge 1996.
[50] Tamże, s. 92.
[51] Zob. np. G. Nowak, *Biologia i epistemologia*, w: M. Hetmański (red.), *Epistemologia współcześnie*, Kraków: Universitas 2007, s. 255-269.
[52] J. Dębiec, *Mózg i matematyka*, s. 84.
[53] Tamże, s. 88.

Powiązanie tezy o nadmiarowej funkcji mózgu z niezależnością myślenia matematycznego od ewolucyjnie wykształconego języka potocznego wydaje się zatem sugerować, iż mówienie o matematycznej intuicji czy bezpośrednim (pozajęzykowym) oglądzie bytów matematycznych nie musi być, w świetle przytoczonych wyników, uznane za pustosłowie. Argumentacja za wrodzonym charakterem poznania matematycznego oparta na m.in. *zmyśle liczby* i *intuicji mnogości*, wydaje się sensowna i do przyjęcia ze zdroworozsądkowego punktu widzenia, ale jest jeszcze daleko do całkowitego wyjaśnienia tego typu poznania w kategoriach naturalistycznych.

Filozoficzne konsekwencje, jakie sami naukowcy wyprowadzają z tych wyników, wydają się być problematyczne. Stanislas Dehaene i Gerald Edelman twierdzą, iż ewolucyjny charakter matematyki raczej skłania do przyjęcia stanowiska antyplatońskiego niż realizmu matematycznego[54]. Z drugiej strony jednak, mając na uwadze „cud” odpowiedniości opisu przyrody przy pomocy matematyki[55], którego wyjaśnieniem jest pogląd, iż u podstaw świata fizycznego leży matematyka (np. Penrose[56], Heller[57]), trudno wyobrazić sobie, że mózg „wytwarza” podstawową matematykę tylko jako „użyteczną fikcję” w celu orientacji w przestrzeni, a matematyka bardziej abstrakcyjna jest tylko wytworem umysłu czy też ma genezę kulturową, jak twierdzi np. Raymond Wilder[58]. Przy uznaniu, że Wszechświat jest u swych podstaw matematyczny, naturalną konsekwencją wydaje się stwierdzenie, że mózg, który należy do Wszechświata, jest również matematyczny, a wykorzystywana przez niego matematyka do opisu tego samego Wszechświata jest czymś obiektywnym. Lepiej zatem powiedzieć, że matematyka odnosi się do świata, który, jak mawiają platonicy matematyczni, jest raczej *odkrywany* niż *tworzony*.

## Podsumowanie

W niniejszym artykule przytoczone zostały zarzuty wobec postulowanego przez platoników intuicyjnego poznania matematycznego: niejasność pojęcia *intuicji*, problem oddziaływania bytów konkretnych z abstrakcyjnymi etc. Problematyka epistemologiczna w filozofii matematyki została następnie zaprezentowana w kontekście rozwiązań problemu

[54] Tamże, s. 100. Krytykę „antyplatonizmu” S. Dehaene’a przeprowadza w recenzji jego książki *The Number Sense* ks. Michał Heller; zob. M. Heller, *Mózg i matematyka*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce” XXVI (2000), s. 128-134.

[55] E. Wigner, *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*, „Communications in Pure and Applied Mathematics” 13 (1960), s. 1-14.

[56] Zob. np. R. Penrose i in. *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł…*, s. 18-19.

[57] Zob. np. M. Heller, *Filozofia i wszechświat*, Kraków: Universitas 2006, s. 48.

[58] Zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki…*, s. 154 n.

umysł-ciało na gruncie filozofii umysłu. Przedstawione zostały wreszcie trzy zasadnicze możliwe rozwiązania problemu intuicji matematycznej: uznanie jej istnienia w ramach fenomenologii i hermeneutyki, negacja istnienia intuicji połączona z uznaniem percepcji zmysłowej za wystarczającą do odkryć matematycznych lub uprawianie matematyki na kształt nauk empirycznych i wreszcie próba podejścia do zagadnienia intuicji z perspektywy nauk neurokognitywnych. Wydaje się więc, że powyższa analiza problemu intuicji matematycznej pokazuje, iż istnieją stanowiska epistemologiczne, które spójne są z ontologicznymi tezami platoników o istnieniu uniwersum bytów matematycznych. W takim świetle platonizm matematyczny nie jawi się jako dogmatyczna deklaracja, ale jako dobrze uzasadniona, choć dyskutowalna, opcja w filozofii matematyki. Wcale nie musi być bowiem tak, jak chcieliby antyplatonicy (głównie o nominalistycznym nastawieniu), że nawet jeśli świat bytów matematycznych istnieje, to jest przyczynowo bezsilny, a co za tym idzie – niedostępny dla naszych władz poznawczych.

Każdy, kto poświęcił choćby chwilę czasu lekturze dzieł Henri Bergsona, szybko zauważył, iż zamiast ścisłych rozumowań próbuje on dotrzeć do czytelnika przy pomocy misternie skonstruowanych obrazów. Paradoksalnie można również odnieść wrażenie, iż Roger Penrose kwalifikuje się do tej samej kategorii, ponieważ wiele idei matematycznych przedstawia on przy pomocy oddziałujących na wyobraźnię złożonych konstrukcji graficznych. Chce w ten sposób ułatwić intuicyjny dostęp do matematycznego uniwersum, nie zawsze, jego zdaniem, osiągalnego metodami obliczeniowymi. Czy zatem, zgodnie z sugestią Bocheńskiego, zamieszczoną na wstępie, obaj myśliciele popełniają grzech lenistwa?

Artykuł ukazał się w „Logos i Ethos” 2_(27)_2009, ss. 25–42, ISSN 0867-8308.

ABSTRACT

*Epistemological and cognitivistic challenges of mathematical platonism*

Mathematical platonism is a recognized stance in the philosophy of mathematics that admits of the objective existence of mathematical entities. Inasmuch as it leads to a “richer mathematics” (i.e., the possibility of non-constructive proofs), it poses serious epistemological problems in regards to the nature of the cognitive power that enables contact with mathematical entities. Many supporters of mathematical Platonism, such as Kurt Gödel and Roger Penrose, maintain that a direct non-discursive power called intuition is responsible for this contact. From the epistemological point of view, however, the precise nature of intuition remains unknown and this notion operates in a variety of imprecise and approximate meanings. This article presents the assessment of intuition from the point of view of the mind-body problem that is presently vividly discussed in the philosophy of mind. Three solutions are proposed: (1) to affirm the existence of intuition in the context of phenomenology and hermeneutics, (2) to reject intuition with the claim that sense perceptions are sufficient to study mathematical objects and (3) to approach intuition from the point of view of neuroscience. In a conclusion, it can be stated that mathematical platonism is not an apriori declaration but can be accommodated within the existing standpoints in epistemology.