Mateusz L. Hohol
Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

Matematyczność ucieleśniona

Niepojęta skuteczność matematyki

Przydatność matematyki w opisie świata czy też inaczej mówiąc, stosowalność matematyki w naukach eksplorowana była już na wiele sposobów. Fakt ten uznawany jest przez wielu filozofów za przesłankę na rzecz realizmu matematycznego o nastawieniu platońskim lub arystotelesowskim. W tym kontekście dyskutowany jest argument z niezbędności Quine'a-Putnama (choć w istocie jest on neutralny ontologicznie) oraz hipoteza matematyczności świata Michała Hellera, jednak należy dodać, że nie brakuje zwolenników podejścia, zgodnie z którym to konstrukcja podmiotu zapewnia postrzeganie świata jako matematycznego – pogląd taki określany będzie w niniejszym artykule jako matematyczność podmiotu.

Zwykle punktem wyjścia w rozważaniach nad stosowalnością matematyki w naukach jest cytat z tekstu Eugene'a Wignera:

> Cud odpowiedniości języka matematyki do wyrażania praw fizyki jest niezwykłym darem, którego nie rozumiemy i na który nie zasługujemy[1].

[1] E.P. Wigner, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, red. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002, s. 309.

Warto zwrócić uwagę na co najmniej dwie kwestie: po pierwsze, matematyka stosowana jest z wielkim powodzeniem nie tylko w fizyce, ale również w pozostałych naukach przyrodniczych, komputerowych (*computer science*), społecznych i innych. Po drugie zaś, to, co Wigner określa jako cud, w rzeczywistości jest głębokim i poważnym problemem, który domaga się zrozumienia i rozwiązania.

Celem niniejszego artykułu jest spojrzenie na problem stosowalności matematyki w naukach czy też matematyczności z punktu widzenia współczesnych nauk kognitywnych, ze szczególnym uwzględnieniem paradygmatu umysłu ucieleśnionego (*embodied mind*) i programu badawczego określanego jako matematyka ucieleśniona (*embodied mathematics*). Rozwiązanie problemu stosowalności matematyki w naukach wypracowane w ramach matematyki ucieleśnionej skonfrontowane zostanie z hipotezą matematyczności świata, a także poglądami przeciwnymi, zgodnie z którymi to podmiot narzuca matematyczność na świat. Artykuł ten naświetlić ma problem, który sformułować można jako pytanie: czy koncepcja matematyczności wykorzystująca wyniki uzyskane w ramach nauk kognitywnych i matematyki ucieleśnionej stanowi opcję konkurencyjną wobec hipotezy Michała Hellera czy też w pewnych aspektach może ją wspierać? Podejście to, w którym nauki kognitywne wykorzystywane są jako narzędzie pozwalające spojrzeć w nowym świetle na problemy filozoficzne, jest realizacją propagowanego od wielu lat przez Michała Hellera programu „filozofii w kontekście nauk”[2].

Hipoteza matematyczności świata

W niniejszym paragrafie krótko zrekonstruowana zostanie hipoteza matematyczności świata. Nie chodzi o odtworzenie wszystkich uwag na ten temat, które znaleźć można w licznych tekstach Michała Hellera, ale raczej o przedstawienie podstawowych idei. W tym celu ograniczyć można się w zasadzie tylko do analizy dwóch artykułów: *Czy świat jest matematycz-*

[2] Por. W.P. Grygiel, *Metodologiczne aspekty uprawiania filozofii umysłu w kontekście nauk kognitywnych*; Ł. Kurek, *Neurofilozofia jako filozofia w kontekście nauki* (obydwa teksty znajdują się w niniejszym tomie), a także B. Brożek, *Philosophy in Neuroscience*, [w:] *Philosophy In Science. Methods and Aplications*, red. B. Brożek, J. Mączka, W.P. Grygiel, Copernicus Center Press, Kraków 2011.

ny?[3] oraz *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*[4]. Uwzględniony zostanie także inny tekst odnoszący się do *neuroscience*. Hipoteza matematyczności świata przedstawia się następująco:

> światu należy przypisać cechę, dzięki której szczególnie skutecznie można go badać za pomocą metody matematycznej. Świat posiada więc racjonalność szczególnego typu – typu matematycznego[5].

Stwierdzenie to zawiera deklarację realizmu matematycznego. Trudno rozstrzygnąć jednoznacznie, czy jest to realizm o charakterze platońskim, gdzie matematyka traktowana jest jako pozaczasowa, pozaprzestrzenna i uprzednia wobec świata fizycznego[6], czy też bardziej umiarkowany realizm o charakterze arystotelesowskim, gdzie matematyka traktowana jest jako istniejąca w świecie fizycznym[7]. Zaryzykować można stwierdzenie – które nie będzie jednak dyskutowane w niniejszym tekście – że w ujęciu Michała Hellera obydwa podejścia są komplementarne.

Wymieniona w powyższym cytacie cecha (czy też własność) określana będzie dalej za Hellerem jako *M*. W dyskusjach nad poruszaną tematyką niemal zawsze pojawia się dystynkcja na matematyczność i matematyzowalność. Heller wyjaśnia tę różnicę poprzez analogię z orientowalnością oraz zorientowaniem powierzchni geometrycznej. Orientowalność jest możliwością zorientowania i w związku z tym, aby powierzchnia mogła zostać zorientowana, musi być ona orientowalna[8]. Dalej Michał Heller wyjaśnia jednak, że w jego ujęciu różnica między matematycznością a matematyzowalnością zanika, gdyż to właśnie *M* jest ontologiczną własnością, dzięki której matematyka jest stosowalna do opisu świata fizycznego[9]. Heller zauważa jednak, że niektórzy filozofowie

---

[3] Zob. M. Heller, *Czy świat jest matematyczny?*, [w:] *idem*, *Filozofia i Wszechświat*, Universitas, Kraków 2006, s. 48-57.
[4] Zob. *idem*, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, [w:] *Matematyczność przyrody*, red. M. Heller, J. Życiński, Petrus, Kraków 2010, s. 7-18.
[5] *Idem*, *Czy świat jest matematyczny?*, *op.cit.*, s. 48.
[6] Pogląd taki jednoznacznie przyjmuje np. Roger Penrose. Zob. R. Penrose, *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, tłum. P. Amsterdamski, red. M. Longair, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, s. 17-19.
[7] Arystotelizm w filozofii matematyki i fizyki przypisać można np. Rolandowi Omnèsowi. Zob. R. Omnès, *Converging Realities. Toward a Common Philosophy of Physics and Mathematics*, Oxford University Press, Princeton, Oxford 2002, s. 22-47.
[8] Por. M. Heller, *Czy świat jest matematyczny?*, *op.cit.*, s. 49.
[9] Por. *ibidem*.

mówią o matematyzowalności świata w znaczeniu analogicznym do wyżej podanego przykładu orientowalności powierzchni geometrycznej. Wówczas problem sprowadza się tylko do metodologicznej możliwości stosowania matematyki z pominięciem aspektu ontologicznego. Wtenczas interesująca staje się jedynie techniczna strona matematycznego modelowania świata[10].

Aby uprawomocnić hipotezę matematyczności świata, Michał Heller odwołuje się do eksperymentu myślowego, który pokazuje, jak wyglądałby świat pozbawiony własności *M*. Formułuje on hierarchię światów od „bardziej niematematycznych" do „mniej niematematycznych".

Pierwszy ze światów określany jest jako całkowicie niematematyczny lub irracjonalny. Jest to świat,

> w którym żadne zasady matematyki (i logiki) nie obowiązują; lub nawet silniej – w którym nie obowiązują zasady żadnej matematyki (i żadnej logiki)[11].

W związku z tym, że świat taki pozbawiony jest wszelkich reguł, obowiązywać mogą w nim wszystkie sprzeczne ze sobą prawidłowości. Świat ten jest zatem sprzeczny i – zdaniem Hellera – dlatego też nie może istnieć.

Drugi ze światów jest matematyczny, ale z racji swojego skomplikowania całkowicie niepoznawalny. Świat ten określany jest również jako bardzo złośliwy. Heller ilustruje go przykładem (modelem) zaczerpniętym od Andrzeja Staruszkiewicza. W modelu tym świat może posiadać tylko dwa stany: 0 i 1. Ciąg zer i jedynek reprezentuje historię tego hipotetycznego świata: **.011000101011…** (kropka na początku ciągu oznacza początek świata). Celem nauki jest dostarczenie teorii, która pozwala na predykcje kolejnych stanów świata. Podstawowym warunkiem takiej teorii jest to, że struktura matematyczna, która przybliża powyższy ciąg, musi być prostsza od niego samego. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jest algorytmicznie ścieśnialny[12]. Okazuje się, że rozważany ciąg nie posiada tej własności. Co za tym idzie, możemy dysponować albo teorią matematyczną identyczną z rozważanym ciągiem, albo nie posiadać teorii wcale. Świat ten jest wprawdzie matematyczny, ale nie można opisać go za pomocą żadnych prostszych struktur.

[10] Por. *ibidem*, s. 49-50.
[11] *Ibidem*, s. 50.
[12] Por. *ibidem*, s. 51-52.

Trzeci ze światów określany jest jako nieobliczalny lub łagodnie złośliwy. Jest on bardzo podobny do naszego Wszechświata z tym wyjątkiem, że siła grawitacji pomiędzy dwiema masami działa odwrotnie proporcjonalnie do odległości pomiędzy ciałami podniesionymi do potęgi 1,999 (a nie, zgodnie z prawem Newtona, do drugiej potęgi)[13]. W konsekwencji takiej „niewielkiej" różnicy ruchy planet przebiegałby po bardzo skomplikowanych torach, które naukowcy musieliby opisywać za pomocą systemu epicykli. Heller dodaje ponadto, iż po tak „niewielkiej" zmianie jest wysoce wątpliwe, aby ze względu na niestabilne warunki termiczne mogło rozwinąć się życie.

W związku z tym, że – jak wynika z powyższego eksperymentu myślowego – istnieć mogą światy matematyczne, ale niepoznawalne, Michał Heller rozszerza terminologię dotyczącą matematyczności świata, wyróżniając światy poznawczo matematyczne – do badania których matematykę można wykorzystywać z powodzeniem, oraz światy ontologicznie matematyczne – czyli takie, które nie są całkowicie niematematyczne, ale do opisu których stosowanie matematyki nie musi być skuteczne[14]. Mimo tego, że mogą istnieć światy, które są niebadalne matematycznie, muszą być one matematyczne w sensie ontologicznym, gdyż jak pisze Heller: „matematyczność w sensie ontologicznym jest koniecznym warunkiem istnienia"[15]. W ujęciu Hellera matematyczność świata jest zatem czymś więcej niż usprawiedliwieniem stosowalności matematyki w naukach.

Michał Heller zadaje pytanie: „dlaczego i co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?". Aby na nie odpowiedzieć, wyróżnia on trzy składowe tego pytania: świat, matematykę oraz ludzki umysł[16]. Pierwsza z nich, tj. świat, który jego zdaniem posiadać musi własność *M*, został już przeanalizowany. Jeśli chodzi o drugą z wyróżnionych składowych, to Heller – z jednej strony – zauważa zależność natura matematyki a stosowalność matematyki, gdzie ontologiczne rozstrzygnięcia czynione np. w obszarze stanowisk takich jak platonizm, intuicjonizm czy formalizm niewątpliwie rzutują na wytłumaczenie stosowalności matematyki w naukach. Z drugiej strony zaś – podkreśla on znaczenie odwrotnej relacji, tj. stosowalność matematyki a natura matematyki. Jak pisze Heller:

[13] Por. *ibidem*, s. 52.
[14] Por. *ibidem*, s. 53.
[15] *Ibidem*.
[16] Por. M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, *op.cit.*, s. 12.

> jeżeli zgodzić się, że świat rzeczywiście istnieje (jeżeli stanąć na stanowisku realizmu), i przyjąć do wiadomości potwierdzaną na każdym kroku przez fizykę odpowiedniość pomiędzy pewnymi matematycznymi strukturami a światem, to niełatwo uznać, że matematyka sprowadza się do gry symboli lub jest wymysłem człowieka. Dlaczego świat miałby być partnerem do gry lub dlaczego przyroda tak łatwo stosowałaby się do ludzkich wymysłów?[17].

Warto zauważyć, że powyższy cytat jest w zasadzie równoważny argumentowi z niezbędności Quine'a-Putnama[18], choć pamiętać należy, że argument ten jest utrzymany w duchu ontologii zrelatywizowanych do języka, a więc jest ontologicznie neutralny. Problem ten rozważony zostanie dokładniej w dalszej części opracowania.

Pozostaje jeszcze trzecia – najbardziej interesująca z punktu widzenia kognitywisty – składowa, czyli umysł. Pogląd co do zasady przeciwny hipotezie Hellera głosi, że matematyczność nie jest własnością świata, ale podmiotu (który narzuca ją światu). Heller dodaje, że zwolennicy takiego ujęcia zazwyczaj podkreślają, że matematyka, jaką dysponuje podmiot, abstrahowana jest ze świata fizycznego. W ich ujęciu zachodzi również relacja odwrotna – matematyka, która wyabstrahowana jest ze świata, stosowalna jest do opisu świata. Zdaniem Hellera taka odpowiedź trywializuje cały problem[19], zgadza się on jednak, że wiedza matematyczna może wywodzić się z abstrakcji własności świata fizycznego. Aby połączyć ten pogląd z realizmem matematycznym, czyli ze stwierdzeniem istnienia własności *M*, czyni on dystynkcję na naszą matematykę (określa ją jako matematykę przez „m") oraz matematykę jako taką (którą określa mianem matematyki przez „M")[20]. Matematyka przez „m", będąc ludzkim konstruktem, jest zarazem odbiciem niezależnej od ludzi Matematyki jako takiej[21]. Własność *M*, dzięki której świat można badać metodami matematycznymi, wiąże się w ujęciu Hellera z istnieniem matematyki przez „M".

Jak zostało już zasygnalizowane, opcją przeciwną do hipotezy matematyczności świata są różne poglądy, które określić można zbiorczym

---

[17] *Ibidem*.
[18] Por. K. Wójtowicz, *Spór o istnienie w matematyce*, Semper, Warszawa 2003.
[19] Por. M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, *op.cit.*, s. 15.
[20] Por. *ibidem*, s. 15-16.
[21] Podobną dystynkcję znaleźć można u Kurta Gödla. Por. S. Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne*, Wyd. IFiS PAN, Warszawa 2003, s. 161-162.

mianem matematyczności podmiotu. Do poglądów takich zalicza się kantyzm. Jak pisze Heller:

> Niektórzy filozofowie inspirowani doktryną Kanta zgodziliby się z tym, że nie można tłumaczyć matematyki jako takiej procesem abstrakcji z rzeczywistego świata, ale utrzymywaliby, że matematyka jest pewną własnością naszego umysłu (kategorią umysłu, jak zapewne Kant by powiedział). A zatem to nie świat jest matematyczny, matematyczny jest nasz umysł. Ponieważ poznajemy świat nie takim, jakim jest sam w sobie, lecz takim, jakim przedstawia się naszemu umysłowi, nic dziwnego, iż przypisujemy mu matematyczny charakter[22].

Heller polemizuje z takim poglądem. Twierdzi on, że kantyzm nie traktuje poważnie teorii ewolucji: matematyka traktowana jako wyposażenie umysłu powinna mieć genezę ewolucyjną. Jeśli tak jest, to wciąż pozostaje pytanie o matematyczność ewolucji. Poza tym – zdaniem Hellera – nawet jeśli jest tak, że matematyczność rzutowana jest z umysłu na świat, to wciąż istnieć musi własność *M*, która pozwala na to rzutowanie. Zauważa on, że wprawdzie istnieje coś takiego jak „efekt Kanta" (zdaniem Hellera efekt ten związany jest z procesami ewolucyjnymi, a nie istnieniem kategorii *a priori*), jednak nie uniemożliwia to poznania zewnętrznego świata (w terminologii Kanta: świata samego w sobie lub świata noumenów)[23].

W kwestii umysłu – która z punktu widzenia niniejszego opracowania jest najbardziej interesująca – warto odwołać się do jeszcze jednego tekstu Michała Hellera – *Mózg i matematyka*[24]. Tekst ten jest recenzją książki matematyka i kognitywisty Stanislasa Dehaene'a *The Number Sense*[25]. W ogólności Heller uważa neurobiologiczne badania nad poznaniem matematycznym za cenne i ciekawe, polemizuje jednak z Dehaenem, a także innymi neuronaukowcami – w szczególności z Jean-Pierrem Changeux[26] – którzy przy okazji badania poznania matematycznego jednocześnie wygłaszają poglądy w kwestii ontologii matematyki. Zdaniem wspomnianych autorów proste zdolności matematyczne stanowią część ewolucyjnego

[22] M. Heller, *Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?*, *op.cit.*, s. 16.
[23] Por. *ibidem*, s. 17.
[24] Por. M. Heller, *Mózg i matematyka*, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce" 2000, nr 24, s. 128-134.
[25] Por. S. Dehaene, *The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, New York – Oxford 1997.
[26] Por. J-P. Changeux, A. Connes, *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, tłum. z francuskiego M.B. DeBevoise, Princeton University Press, Princeton, New Yersey 1995.

dziedzictwa człowieka (część z nich jest wrodzona, zaś część rozwija się już w najwcześniejszych miesiącach życia), a zatem matematyka jest produktem ludzkiego umysłu i nie może być mowy o matematyce niezależnej od człowieka (matematyce przez „M"). Wspomniani autorzy jednoznacznie wypowiadają się przeciw realizmowi matematycznemu. W swojej polemice Heller – który bardzo poważnie traktuje *neuroscience* oraz jej możliwości eksplanacyjne – kwestionuje powyższe a zatem. Po pierwsze, jeszcze raz rozdziela on kwestię poznania matematyki od jej ontologii. Twierdzi poza tym, że na literalnym poziomie platonik matematyczny z radością przyjmie wiadomość, że część zdolności matematycznych ma charakter wrodzony. Odkrycia z zakresu nauk przyrodniczych można interpretować zatem na różne sposoby. Raz jeszcze Heller powołuje się na matematyczność procesów ewolucji kosmicznej i biologicznej:

> Tak czy inaczej to ewolucja wyposażyła nasz mózg w pewne umiejętności matematyczne, ale odkrywając strukturę naszego mózgu i sposoby jego funkcjonowania, możemy jedynie zrozumieć, jak w naszym mózgu powstają pojęcia matematyczne, ale nie jesteśmy w stanie wyjaśnić probabilistycznych strategii ewolucji (ponieważ mózg jest produktem ewolucji, a nie odwrotnie) i nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć na pytanie, dlatego prawa przyrody […] są matematyczne[27].

Neurobiolog, który wyjaśniając poznanie i zdolności matematyczne, ogłasza jednocześnie, że platońska matematyka nie istnieje, popełnia więc nadużycie. Co więcej, zdaniem Hellera, *implicite* przyjmuje on to, co chce obalić, a więc istnienie własności *M*, która gwarantuje nie tylko poznanie, ale i istnienie procesów ewolucji biologicznej. Filozoficzne dywagacje wspomnianych kognitywistów zajmujących się matematyką przypominają rozwiązanie kantowskie[28]. Heller stosuje wobec nich również podobne kontrargumenty. W kolejnych częściach opracowania przedstawię pokrótce paradygmat umysłu ucieleśnionego i matematyki ucieleśnionej oraz opartego na nich rozwiązania problemu stosowalności matematyki w naukach.

---

[27] M. Heller, *Mózg i matematyka*, *op.cit.*, s. 133-134.

[28] Często można spotkać się z opinią, że psychologia ewolucyjna jest przedłużeniem kantyzmu, tyle że kantowskie kategorie *a priori* zostają w psychologii ewolucyjnej zastąpione wrodzonymi, wyspecjalizowanymi modułami obliczeniowymi, które ukształtowane zostały w środowiskach ancestralnych w okresie plejstocenu. W takim ujęciu konkretne moduły odpowiedzialne są np. za zdolności matematyczne.

Ucieleśniony umysł

Umysł ucieleśniony (*embodied mind*) to określenie odnoszące się do tzw. drugiej generacji nauk kognitywnych (*second generation cognitive science*). Kognitywistyka pierwszej generacji, która dominowała od lat 50. do 80. XX w. związana była z badaniami nad sztuczną inteligencją. Obowiązującą teorią umysłu był funkcjonalizm komputerowy. W takim ujęciu – najogólniej rzecz ujmując – umysł traktowano jako program (*software*), zaś mózg – jak komputer (*hardware*)[29]. Za istotę inteligencji uważano rozwiązywanie problemów, zaś myślenie sprowadzane było do manipulacji symbolami (nieco później paradygmat symboliczny zastąpiony został przez koneksjonizm). Zwolennicy kognitywizmu pierwszej generacji uważali, że praktyczne projekty sztucznej inteligencji polegające m.in. na komputerowym modelowaniu funkcji kognitywnych przyczynią się do lepszego zrozumienia umysłu ludzkiego. Wspomnieć należy także, że w tradycyjnym podejściu mózg traktowany był jako układ względnie izolowany od środowiska.

Druga generacja nauk kognitywnych zrywa z powyższymi założeniami. Początki paradygmatu ucieleśnionego umysłu związane są z pojawieniem się lingwistyki kognitywnej, a konkretniej – z wydaniem przez językoznawcę George'a Lakoffa i filozofa Marka Johnsona w 1980 r. książki *Metafory w naszym życiu* (oryginalnie *Metaphors We Live By*)[30]. Mimo licznych mankamentów książka ta stanowiła przełom w myśleniu o naturze pojęć, podkreślając np. ich metaforyczny charakter. Metafory nie są traktowane przez Lakoffa i jego współpracowników jako środki ekspresji poetyckiej, ale jako narzędzia myślenia, percepcji i działania, dzięki którym możliwa jest np. konceptualizacja obiektów abstrakcyjnych (w tym matematycznych). Co więcej, duża część ludzkiego systemu konceptualnego traktowana jest jako metaforyczna. Koncepcja ta rozwijana była – i jest nadal – przez Lakoffa w innych książkach napisanych samodzielnie lub wspólnie z różnymi autorami[31].

---

[29] Por. A. Turing, *Maszyna licząca a inteligencja*, tłum. M. Szczubiałka, [w:] *Filozofia umysłu*, red. B. Chwedeńczuk, Aletheia, Warszawa 1995, s. 271-300.

[30] Por. polskie wydanie: G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, tłum. T.P. Krzeszowski, Aletheia, Warszawa 2010.

[31] Por. G. Lakoff, *Woman, Fire and, Dangerous Things*, The Chicago University Press, Chicago – London 1990. W książce tej Lakoff przedstawił teorię metafor w sposób znacznie bardziej systematyczny i wolny od dużej części nieścisłości, które znalazły się w *Metaforach w naszym życiu*.

Najprościej rzecz ujmując, metafora to: „rozumienie i doświadczanie pewnego rodzaju rzeczy w terminach innej rzeczy”[32], zaś bardziej precyzyjnie metafora jest odwzorowaniem skonceptualizowanej dziedziny źródłowej na dziedzinę docelową, która podlega konceptualizacji. W odwzorowaniu tym cechy strukturalne dziedziny wyjściowej przenoszone są na dziedzinę docelową. Metafora nie jest wytworem pojawiającym się na poziomie języka, ale głębiej – na poziomie pojęć, które powstają w ucieleśnionym umyśle[33]. Warto wspomnieć, że niemal od samego początku lingwistyka kognitywna wspierana była badaniami z zakresu eksperymentalnej psychologii kognitywnej – prowadzonymi m.in. przez Eleanor Rosch[34] i Amosa Tversky'ego[35] – w ramach których badano ludzkie predyspozycje konceptualne i kategoryzacyjne. Dzięki metaforom (których zestawy Lakoff i współpracownicy przedstawiają w poszczególnych książkach) możliwe jest „zajrzenie” do ludzkich procesów konceptualizacyjnych, które w dużej części przebiegają nieświadomie.

Lingwistyka kognitywna i paradygmat ucieleśnionego umysłu zrywają z klasycznym myśleniem o języku, które dominowało od Arystotelesa aż do generatywizmu Noama Chomsky'ego. W klasycznym ujęciu wyróżniano co najmniej dwa niesprowadzalne do siebie komponenty języka: zbiór reguł składniowych (syntaksę) oraz znaczenie (semantykę), zaś przyporządkowanie danego obiektu do określonej kategorii miało być możliwe dzięki inherentnym cechom obiektów (rozumianym w duchu Arystotelesa). Najważniejszym przełomem, który dokonał się na gruncie drugiej generacji kognitywistyki, jest naturalizacja znaczenia pojęć, dzięki czemu podział na syntaksę i semantykę traci na znaczeniu. Możliwe jest to poprzez związanie znaczenia z funkcjonowaniem ucieleśnionego umysłu. W tym kontekście warto zacytować Lakoffa i Johnsona:

> Nie istnieje ktoś taki jak człowiek obliczeniowy […], którego umysł jakimś sposobem wytwarza znaczenie, otrzymując pozbawione znaczenia symbole „na wejściu”, przetwarzając je zgodnie z regułami i ponownie generując „na wyjściu”. Prawdziwi ludzie mają umysły

[32] G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, *op.cit.*, s. 31.

[33] Por. A. Pawelec, *Znaczenie ucieleśnione. Propozycje kręgu Lakoffa*, Universitas, Kraków 2005, s. 38 i n.

[34] Por. E.H. Rosch, *Human Categorization*, [w:] *Advances in Cross-Cultural Psychology*, t. I, red. N. Warren, Academic Press, New York 1977, s. 1-72.

[35] Por. A. Tversky, *Features of Similarity*, „Psychological Review” 1977, no. 84, s. 327-252.

> ucieleśnione, a ich systemy pojęciowe powstają dzięki żywemu ciału, są przez nie ukształtowane i dzięki niemu posiadają znaczenie. Sieci neuronowe w naszych mózgach wytwarzają systemy pojęciowe i struktury językowe, których nie da się adekwatnie wyjaśnić jedynie za pomocą przetwarzających symbole systemów formalnych[36],

a także Ronalda Langackera:

> Pojęcie k o n c e p t u a l i z a c j i jest rozumiane tu w najszerszym tego słowa znaczeniu, obejmując zasadniczo każdy rodzaj doświadczenia mentalnego. Należy tu więc zaliczyć: (a) zarówno utrwalone, jak i nowe koncepty, (b) nie tylko pojęcia abstrakcyjne czy intelektualne, ale także bezpośrednie doznania sensoryczne, motoryczne i emotywne, (c) koncepty, które nie są natychmiastowe, ale zmieniają się lub rozwijają w czasie przetwarzania, (d) pełne zrozumienie kontekstu fizycznego, społecznego i językowego. Krótko mówiąc, znaczenie językowe jest widziane jako produkt aktywności mentalnej fizycznie ucieleśnionego ludzkiego umysłu ugruntowanego kulturowo i społecznie[37].

W paradygmacie ucieleśnionego umysłu znaczenie wywodzone jest z naturalnych doświadczeń oraz interakcji organizmu ze światem zewnętrznym. Umysł wykorzystuje pierwotne struktury znaczące związane m.in. z naturalną orientacją ciała w świecie (dół – góra, przód – tył, centralny – peryferyjny), a następnie za ich pomocą generuje bardziej skomplikowane znaczenia językowe (np. przy użyciu amalgamatów pojęciowych)[38]. Procesy te w przeważającej części są nieświadome. Jak wspomniano wcześniej, wgląd do nich możliwy jest poprzez metafory.

Ponieważ – z ewolucyjnego punktu widzenia – podstawowym zadaniem mózgu jest generowanie optymalnych zachowań jako odpowiedzi na informacje docierające ze środowiska, w badaniach nad ucieleśnionym umysłem należy zrobić „krok wstecz" i odnieść się właśnie do tych informacji. Stąd też mówi się, że umysł jest nie tylko ucieleśniony (*embodied*), ale także zanurzony w środowisku (*embedded*). W radykalnym ujęciu omawianego paradygmatu twierdzi się, że aktywne w środowisku zewnętrznym całe ciało jest „narządem poznawczym" i głównym czynnikiem kształtującym umysł.

[36] G. Lakoff, M. Johnson, *Co kognitywizm wnosi do filozofii*, tłum. A. Pawelec, „Znak" 1999, nr 11, s. 245-263.

[37] R. Langacker, *Dlaczego umysł jest niezbędny. Konceptualizacja, gramatyka i semantyka językoznawcza*, tłum. K. Krawczak, [w:] *Formy aktywności umysłu. Ujęcia kognitywistyczne*, t. II: *Ewolucja i złożone struktury poznawcze*, red. A. Klawiter, PWN, Warszawa 2009, s. 289.

[38] Por. A. Pawelec, *op.cit.*, s. 84 i n.

Poznanie ludzkiego umysłu możliwe jest tylko poprzez integrację badań neurobiologicznych oraz badań nad relacjami fizycznymi, społecznymi i kulturowymi, w jakie wchodzi organizm. Założenie ucieleśnionego umysłu jest, jak wspomniano wcześniej, przeciwieństwem obliczeniowych teorii umysłu, ale także dualistycznego podejścia do problemu *mind – body* (kartezjanizm). Teoria ucieleśnionego umysłu wspierana jest natomiast przez badania neurobiologiczne, ewolucyjne i ekologiczne[39]. Taka perspektywa badawcza odniosła sukces na wielu polach, nie tylko w wyjaśnianiu ludzkich procesów kognitywnych, ale także np. w praktycznych projektach z zakresu robotyki i sztucznej inteligencji (AI)[40]. Kwestią otwartą pozostaje pytanie, czy tak szeroki projekt może być wolny od „anarchizmu metodologicznego". Podsumowując, należy podkreślić, że prezentowana wizja drugiej generacji kognitywistyki opiera się na trzech podstawowych założeniach: (1) ucieleśnieniu umysłu, (2) metaforyczności myślenia, (3) nieświadomości dużej części procesów kognitywnych.

Matematyka i matematyczność ucieleśniona

Ucieleśniony umysł jest obecnie paradygmatem wiodącym w kognitywistyce. Stwierdzenie, że duża część procesów poznawczych przebiega nieświadomie, nie budzi raczej kontrowersji wśród badaczy mózgu i umysłu, zaś teoria metafor należy do mainstreamu lingwistyki kognitywnej. Lakoff i jego współpracownicy zastosowali powyższe założenia do badań nad różnymi obszarami aktywności poznawczej człowieka. Najistotniejszym z punktu widzenia niniejszego opracowania – i jednym z najbardziej interesujących w ogóle – owocem tych badań jest napisana przez Lakoffa wspólnie z Rafaelem Núñezem książka *Where Mathematics Comes From*[41] (dalej w tekście głównym stosuję skrót: *WMCF*). Przedstawiona tam koncepcja jest wciąż rozwijana głównie przez samego Núñeza w licznych publikacjach[42].

[39] Por. T. Ingold, *Ewoluujące umiejętności*, przeł. M. Polaszewska-Nicke, [w:] *Formy aktywności umysłu...*, t. II, *op.cit.*, s. 110-131.
[40] Por. R. Chrisley, *Embodied Artificial Intelligence*, „Artificial Intelligence" 2003, no. 149, s. 131-150.
[41] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York 2000.
[42] Por. R. Núñez, *No Innate Number Line in the Human Brain*, „Journal of Cross-Cultural Psychology" 2011, no. 45, s. 651-668.

Fundamentem projektu jest wskazanie bazy biologicznej, która związana jest z podstawowymi zdolnościami matematycznymi – głównie numerycznymi, teoriomnogościowymi i arytmetycznymi. Istotną rolę odgrywają badania wspominanego wcześniej Stanislasa Dehaene'a, a także innych naukowców[43]. Okazuje się, że neurobiologiczną bazę dla tworzenia reprezentacji numerycznych stanowią przede wszystkim struktury dolnej kory ciemieniowej (*inferior parietal cortex*) mózgu. Podstawowe zdolności matematyczne takie jak rozróżnianie liczebności zbiorów (intuicja mnogości), dodawanie i odejmowanie małych liczb (zmysł liczby), zauważanie ekwiwalencji pomiędzy jednakową liczbą obiektów doświadczanych słuchowo oraz wzrokowo, używanie symboli oraz zapamiętywanie wyników operacji są po części obecne już u noworodków, a po części pojawiają się we wczesnych miesiącach życia[44]. Stanowią one część naturalnego wyposażenia biologicznego pozwalającego radzić sobie z wymaganiami środowiska. Biologiczne podstawy prostej matematyki są dość dobrze znane psychologom i kognitywistom, wiedza na ich temat nie wystarcza jednak, by odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób tworzone są skomplikowane teorie matematyczne i jak stosowane mogą być one do opisu świata fizycznego.

Szerszej perspektywy dostarcza oryginalne podejście Lakoffa i Núñeza, którzy próbują przedstawić konceptualne podstawy matematyki poprzez wskazanie odpowiedniego zestawu metafor, nabytych jako adaptacje psychologiczne w naturalnych procesach selekcyjnych[45]. W rezultacie możliwe ma być wskazanie, jak pojęcia matematyczne ostatecznie ugruntowane są w doświadczeniu cielesnym, a także wyjaśnienie migracji pojęć pomiędzy różnymi działami matematyki. Ich zdaniem metafory pozwalają na konceptualizację abstrakcyjnych pojęć matematycznych w terminach pojęć konkretnych, które pojawiają się dzięki interakcjom ludzkiego systemu sensoryczno-motorycznego ze światem. Dzięki amalgamatom pojęciowym (i innym narzędziom) możliwe jest łączenie podstawowych metafor w bardziej złożone, a w konsekwencji także stosowanie wyrafinowanych rozumowań

[43] Lakoff i Núñez powołują się na badania takich naukowców, jak np.: L. Wynn, S.E. Antell, D.P. Keating, E. van Loosbroek, A.W. Smitsman, B. Butterworth (i innych). Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 15-26.
[44] Więcej informacji na ten temat znaleźć można np. w pracy: J. Dębiec, *Mózg i matematyka*, OBI – Biblos, Kraków – Tarnów 2002.
[45] Jako prekursora takiego podejścia wymienić należy Saundersa Mac Lane'a. Zob. S. Mac Lane, *Mathematics, Form and Function*, Springer – Verlag, New York 1986.

matematycznych. Metafory, które przywołują Lakoff i Núñez, dają – ich zdaniem – wgląd do matematycznych procesów konceptualizacyjnych, które zachodzą w ucieleśnionym umyśle na poziomie nieświadomym.

Co istotne, procesy kognitywne odpowiedzialne za tworzenie matematyki nie stanowią specyficznej dziedziny aktywności umysłu, ale związane są z codziennymi doświadczeniami takimi jak np. percepcja podstawowych relacji przestrzennych, zdolność do rozmieszczania obiektów w przestrzeni, zdolność do grupowania obiektów, postrzegania ich w ruchu, orientacja własnego ciała w przestrzeni[46]. Zdaniem Lakoffa i Núñeza dla tworzenia abstrakcyjnych pojęć, w tym pojęć matematycznych, szczególnie istotne są zaobserwowane i opisane przez Sriniego Narayanana programy ludzkiego układu motorycznego, takie jak: gotowość do określonych ruchów ciała (lub zaprzestania ich), rozpoczynanie działań, zaprzestawanie ich i wznawianie, iterowanie procesów, wykonywanie działań celowo, a także zdolność do rozpoznana, że cel działań został osiągnięty, i sprawdzenia poprawności zastosowanej procedury[47].

Większość materiału zawartego w *WMCF* to przykłady, w których Lakoff i Núñez prezentują działanie poszczególnych metafor, takich jak **Klasy są Pojemnikami**, **Liczby są Obiektami** czy też **Metafory Boole'a**, **Podstawowej Metafory Nieskończoności**, **Metafory Cantora**, **Metafory redukcji formalnej** i wielu innych, które w intencji autorów stanowić mają koherentny i minimalny system, z którego wyprowadzona może być cała znana człowiekowi matematyka. Przykładowo, prócz wspomnianych wyżej prostych zdolności numerycznych arytmetyka (jako cały dział matematyki) tworzona jest dzięki metaforom takim jak: **Arytmetyka jest Kolekcją obiektów** (oraz rozszerzeniom tej metafory), **Arytmetyka jest Konstrukcją obiektów**, **Arytmetyka jest Ruchem wzdłuż ścieżki** oraz **Metaforze pomiaru** i **Podstawowej metonimii algebry**[48].

W krótkim i niesystematycznym opracowaniu takim jak to można postąpić dwojako: zrezygnować z przykładów, co odbywa się kosztem pozostawienia Czytelnikowi uznania sensowności koncepcji „na wiarę", lub streścić wybrane przykłady. W przypadku podania pewnych przykładów podobnie jak w przypadku pierwszym uznanie sensowności przedsięwzięcia również będzie raczej kwestią wiary niż merytorycznych argumentów. Po przywoła-

[46] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 28 i n.
[47] Por. *ibidem*, s. 34-35.
[48] Por. *ibidem*, s. 50-76.

niu wyrwanych z kontekstu przykładów powstać może dodatkowo wrażenie, że cała koncepcja jest niespójna. Niniejsze opracowanie ogranicza się zatem jedynie do przedstawienia teorii matematyki ucieleśnionej i dostrzeganego przez Lakoffa i Núñeza jej wpływu na filozofię matematyki. Pominięte zostają natomiast wszystkie „techniczne" partie *WMCF*, gdzie autorzy, stosując kognitywną teorię metafor, rekonstruują działy takie jak arytmetyka, logika klasyczna, teoria mnogości, algebra, analiza matematyczna oraz istotne dla matematyki pojęcia takie jak np. n i e s k o ń c z o n o ś ć[49].

Lakoff i Núñez przeciwstawiają się realizmowi w filozofii matematyki (platonizm, arystotelizm), gdzie matematyka traktowana jest jako obiektywna własność Wszechświata, byty matematyczne uznawane są za istniejące obiektywnie, zaś prawda matematyczna postrzegana jest jako obiektywna i uniwersalna[50]. Ponieważ matematyka istniałaby nawet, gdyby nie było uprawiających ją matematyków, koncepcję tę określić można jako m a t e m a t y k a o d c i e l e ś n i o n a. Stanowi ona mieszankę poglądów potocznych, platonizmu oraz *de facto* arystotelizmu (matematyka jako w ł a s n o ś ć Wszechświata).

Jako jeden z argumentów przeciw takiemu ujęciu matematyki Lakoff i Núñez podają przykład liczb naturalnych, które konceptualizować i definiować można na wiele sposobów. Po pierwsze, liczby naturalne rozumieć można zgodnie z metaforą, wedle której są one punktami, czyli 0-wymiarowymi obiektami geometrycznymi na linii liczb. Platonik, który wierzy w realne istnienie liczb naturalnych, musi zaakceptować pogląd, że są one f a k t y c z n i e 0-wymiarowymi obiektami geometrycznymi[51]. Drugi sposób konceptualizacji odwołuje się do teorii mnogości. Dziedziną źródłową tej metafory są zbiory, zaś docelową – liczby naturalne. Przykładowo, Ø odwzorowywany jest jako 0; {Ø} jako 1; {Ø, {Ø}} jako 2 itd. W teorii mnogości liczby nie mogą być zatem traktowane jako obiekty geometryczne[52]. Jeszcze inaczej liczby naturalne rozumiane są w ramach kombinatorycznej teorii gier (jako wartości pozycji gier). Gdyby platońskie uniwersum bytów matematycznych rzeczywiście istniało, koegzystować musiałyby w nim wszystkie trzy (i zapewne jeszcze inne) ujęcia liczb naturalnych.

[49] Szczegółowa analiza zastosowania przez Lakoffa i Núñeza teorii metafor do rekonstrukcji poszczególnych działów matematyki będzie przedmiotem kolejnych publikacji.
[50] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 339-340.
[51] Por. *ibidem*, s. 342.
[52] Por. *ibidem*, s. 343.

Zdaniem Lakoffa i Núñeza uniwersum matematyczne byłoby s p r z e c z n e. Samo w sobie nie wydaje się to wielkim problemem, jednak dla platoników warunkiem istnienia obiektów matematycznych jest właśnie ich n i e s p r z e c z n o ś ć. O ile stwierdzenie Lakoffa i Núñeza, że platońskie uniwersum bytów matematycznych jest sprzeczne, można oczywiście dość łatwo obalić – nie ma sensu czynić tego w tym miejscu – zgodzić należy się jednak, że postulowana przez platoników ontologia jest niezwykle bogata i podejrzana z punktu widzenia brzytwy Ockhama.

Przeciw platonizmowi wymieniać można tu jeszcze jeden argument – tym razem teoriopoznawczy. Przyjmując kauzalną teorię wiedzy (A. Goldman), warunkiem koniecznym, aby *X* posiadał wiedzę o zdarzeniu *Y*, jest związek przyczynowo-skutkowy pomiędzy mniemaniem *X*-a a zdarzeniem *Y*. Związek taki nie może jednak zachodzić pomiędzy obiektem a b s t r a k c y j n y m (w sensie platońskim) a k o n k r e t n y m matematykiem. Problem ten zauważył Paul Benacerraf[53]. Trudności te nie dotykają matematyki ucieleśnionej, gdyż wiedza matematyczna jest wynikiem działania ukształtowanego ewolucyjnie systemu konceptualnego. Z kolei funkcjonujące w ramach tego systemu metafory pozwalają na migrację pojęć pomiędzy różnymi działami matematyki (**Metafora redukcji formalnej**), przez co pluralizm definicji liczb naturalnych nie jest problemem[54].

We wcześniejszym paragrafie omówiłem stosunek Hellera do kognitywistycznych badań nad matematyką – najogólniej rzecz ujmując, ceni je on od strony epistemologicznej, jednak zaprzecza możliwości przejścia od nich do antyrealistycznej ontologii matematyki. Lakoff i Núñez nie zgadzają się z takim podejściem, pisząc:

> Jedyny dostęp człowieka do matematyki, transcendentnej czy każdej innej, odbywa się poprzez pojęcia w naszych umysłach, które kształtowane są przez nasze ciała i mózgi i realizowane fizykalnie w naszych układach nerwowych. Dla człowieka – oraz wszystkich innych ucieleśnionych istot – matematyka j e s t matematyką ucieleśnioną. Jedyna matematyka, którą możemy znać, to ta, której wiedzę dopuszczają nasze ciała i mózgi […]. Teoria jedynej matematyki, którą znamy lub którą możemy znać, jest [jednocześnie] teorią tego, czym matematyka j e s t – czym jest naprawdę![55].

[53] Problematyka ta omawiana była w pracy: W.P. Grygiel, M. Hohol, *Teoriopoznawcze i kognitywistyczne wyzwania matematycznego platonizmu*, „Logos i Ethos" 2009, nr 2(27), s. 25-42.
[54] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 369-373.
[55] *Ibidem*, s. 346.

Jak widać, w przypadku matematyki ucieleśnionej zachodzi przejście od epistemologii do ontologii. Choć *de facto* Lakoff i Núñez nie mają możliwości, by stwierdzić ostatecznie, że platońska matematyka nie istnieje, w przyjmowanym przez nich paradygmacie umysłu istnienie zdolności intelektualnych pozwalających na kontakt z platońską matematyką może zostać prawomocnie zanegowane.

Aby teoria ucieleśnionej matematyki uznana być mogła za propozycję rozsądną, musi tłumaczyć ona wiele kwestii takich jak intersubiektywny charakter matematyki, a także stabilność i pewność osiąganych wyników. Według Lakoffa i Núñeza własności te – a także inne – zostają zachowane, gdyż wygenerowana przez ucieleśniony umysł matematyka posiada własności strukturalne obserwowalne w świecie fizycznym[56]. Własności te przenoszone są dzięki metaforom do domeny docelowej, którą są określone pojęcia matematyczne. Warto przyjrzeć się tej kwestii bliżej.

Jeśli chodzi o intersubiektywność i komunikowalność matematyki, jej podstawą są wrodzone i uniwersalne dla wszystkich ludzi podstawowe zdolności matematyczne takie jak intuicyjne postrzeganie małych zbiorów czy prosta arytmetyka. Jeśli chodzi o bardziej złożone idee i rozumowania matematyczne, wyrastają one z ludzkiej aktywności w świecie związanej z mierzeniem długości, liczeniem, projektowaniem, postrzeganiem ruchu i zmian, grupowaniem obiektów, manipulowaniem nimi (rozciąganiem, kurczeniem, obracaniem) czy też posługiwaniem się symbolami[57]. Zdolności te uniwersalne są dla wszystkich ludzi, gdyż wyrastają z podstawowych interakcji jednostki ze środowiskiem. Przykładowo, z naturalną umiejętnością pomiaru odległości związana jest wykorzystywana w fizyce koncepcja metryki.

Precyzja i stabilność rozumowań matematycznych związana jest szczególnie ze zdolnością człowieka do posługiwania się symbolami. Dzięki niej możliwa jest powtarzalność operacji matematycznych i sprawdzanie poprawności wyników. Inną niezwykle istotną, ale nieomawianą dokładnie w *WMCF* umiejętnością wspólną wszystkim ludziom jest zdolność do imitacji[58]. Wydaje się, że zdolność ta odgrywa ważną rolę nie tylko w procesie nauki matematyki, ale zapewnia również wspomnianą wyżej powtarzalność, która jest istotna z kolei dla precyzji obliczeń

[56] Por. *ibidem*, s. 350.
[57] Por. *ibidem*, s. 351.
[58] Por. C. Heyes, *Cztery drogi ewolucji poznawczej*, tłum. M. Polaszewska-Nicke, [w:] *Formy aktywności umysłu...*, t. II, *op.cit.*, s. 44-49.

matematycznych. Ważnym źródłem stabilności są relacje przestrzenne, w jakie wchodzi człowiek[59]. Podstawowe schematy relacji przestrzennych są używane w matematyce przez wszystkich ludzi pomimo odmienności kulturowej i językowej. Do takich „niezmienników" należą, przykładowo, pojęcia drogi, środka czy granicy.

W pewnej mierze matematyka zależna jest jednak od kultury[60]. W tej kwestii Lakoff i Núñez wymieniają, przykładowo, chęć do poszukiwania istoty rzeczy, która przejawiała się np. w preferowaniu oczywistych aksjomatów przez Eulidesa (dziś wiemy, że V postulat nie jest oczywisty), a także dążenie do poszukiwania podstaw, które zaowocowało w XX w. stworzeniem podejść takich jak logicyzm, intuicjonizm i formalizm. Zarówno poszukiwanie istoty rzeczy, jak i podstaw ściśle związane jest z kulturą europejską opartą na greckiej filozofii. Podejście przedstawione w *WMCF* neguje jednak postulaty radykalnego konstruktywizmu społecznego, zgodnie z którym cała matematyka jest tylko konstruktem opartym na umowie społecznej. Zdaniem Lakoffa i Núñeza paradygmat *embodied* z powodzeniem łączy biologiczne i kulturowe uwarunkowania umysłu, a także jego wytworów takich jak pojęcia matematyczne.

Inną ważną własnością matematyki jest możliwość komunikacji czy też migracji pojęć pomiędzy różnymi jej działami. W ucieleśnionej matematyce jest ona możliwa dzięki odpowiednim metaforom pozwalającym na przenoszenie struktur pojęciowych. W tym kontekście warto wspomnieć o sygnalizowanej już **Metaforze redukcji formalnej**, za pomocą której dowolne obiekty matematyczne reprezentowane są w terminach teoriomnogościowych. Dziedziną źródłową tej metafory są obiekty teoriomnogościowe reprezentowane przez ciągi symboli, zaś dziedziną docelową – dowolne pojęcia matematyczne. Co więcej, odpowiednie metafory pozwalają zachować pluralizm matematyki – matematyka ucieleśniona nie zakłada, że istnieje jedna prawdziwa geometra, logika czy też teoria mnogości, ale że istnieją raczej różne geometrie (euklidesowe i nieeuklidesowe), różne logiki (klasyczna, wielowartościowe, niemonotoniczne itd.) i różne teorie mnogości (zależne od przyjętych aksjomatów, np. ZF, ZFC, NF Quine'a).

[59] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 353.

[60] Na kulturowy aspekt matematyki uwagę zwracali m.in. R. Wilder i R. Hersh. Por. R.W. Wilder, *Kulturowa baza matematyki*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, red. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002, s. 275-292.

Istotną własnością (o ile można tak powiedzieć) sądów matematycznych jest ich wartość poznawcza, tj. prawdziwość lub fałszywość. Zdaniem Lakoffa i Núñeza „prawda matematyczna jest jak każda inna prawda”[61]. Poglądy na temat ujęcia prawdy w paradygmacie *embodied* ujęte są w sposób dość systematyczny w książce *Metafory w naszym życiu*[62]. Lakoff i Johnson piszą tam, że choć nie uznają istnienia absolutnej i ponadczasowej prawdy, nie przekreślają prawdziwości sądów w ogóle. Twierdzą oni, że prawda z a w s z e zrelatywizowana jest do określonego systemu pojęciowego, systemy pojęciowe mają zaś w dużej mierze charakter metaforyczny i powstają jako wynik interakcji organizmu ze światem fizycznym. W związku z tym prawda nie odnosi się do „rzeczy samych w sobie”, ale raczej do r e l a c j i podmiotu z rzeczywistością. Przypisywanie prawdziwości sądom – w potocznym ujęciu – możliwe jest tylko, gdy są one z r o z u m i a ł e. Tu po raz kolejny wspominane zostają metafory, gdyż w lingwistyce kognitywnej są one nośnikami semantyki. Sąd uznawany za prawdziwy u w y p u k l a pewną cechę obiektu, zaś pomija czy wręcz zakrywa inne. W ten sposób działają również metafory. Wracając do matematyki, poszczególne metafory tworzą systemy pojęciowe, w ramach których określone sądy są prawdziwe. Przykładowo, stwierdzenie „zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru” (symbolicznie: $\forall A : \emptyset \subseteq A$) jest prawdziwe tylko w obrębie systemu skonstruowanego w oparciu o **Metaforę Boole’a**, a także metaforę **Klasy są Pojemnikami**[63], zaś równanie $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ jest prawdziwe tylko w obrębie systemu pojęciowego, który skonstruowany jest na bazie opisywanych przez Lakoffa i Núñeza **Metafory Cantora** oraz **Podstawowej metafory nieskończoności**[64].

Na gruncie matematyki ucieleśnionej nie można mówić o istnieniu platońskiej matematyki ani matematyki abstrahowanej ze świata fizycznego. Według Lakoffa i Núñeza matematyka nie jest w ł a s n o ś c i ą świata. Ich zdaniem zauważony przez Wienera „cud skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych” wytłumaczyć można bez zakładania – używając terminologii Hellera – matematyczności świata. W świecie istnieją obserwowalne r e g u l a r n o ś c i, które nie są konstrukcją podmiotu (istnieją niezależnie od niego), zdaniem autorów *WMCF* nie znaczy to jednak, że

[61] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 366.
[62] Por. G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, *op.cit.*, s. 215-253.
[63] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 50-152, 367.
[64] Por. *ibidem*, s. 208-222, 368.

są one podstawą dla matematycznego opisu świata. Regularności występujące w świecie pojmowane mogą być przez fizyków *tylko* dzięki wykształconemu ewolucyjnie systemowi kognitywnemu. System ten „pasuje do świata" w takiej mierze, w jakiej okazał się adaptatywny biologicznie – w związku z tym nasze postrzeganie rzeczywistości nie jest *adekwatne*, tylko *optymalne*. Matematyka tworzona jest dokładnie przez ten sam system kognitywny (jedyny, jakim dysponujemy)[65], który odpowiada za przetwarzanie informacji dotyczących obserwowanych regularności w świecie[66]. Zdaniem Lakoffa i Núñeza to również system kognitywny odpowiedzialny jest za *dopasowywanie* odbieranych zmysłowo regularności świata i matematyki, dzięki czemu możliwe jest formułowanie zmatematyzowanych teorii naukowych. Ich zdaniem nie istnieją niezapośredniczone związki pomiędzy światem fizycznym a matematyką – zawsze między dziedzinami tymi pośredniczy ludzki system kognitywny. Reasumując, należy podkreślić, że zdaniem Lakoffa i Núñeza: (1) we Wszechświecie istnieją regularności, (2) ludzie za pomocą wykształconych ewolucyjnie systemów kognitywnych stworzyli matematykę, (3) czasami fizycy z powodzeniem dopasowują matematykę do obserwowanych w świecie regularności i na bazie tego konstruują teorie naukowe.

Matematyczność ucieleśniona a matematyczność świata

W poprzedniej części opracowania przedstawione zostały jedynie wnioski filozoficzne, jakie Lakoff i Núñez wyciągają na podstawie zaproponowanej przez siebie perspektywy matematyki ucieleśnionej. O ile sama propozycja wyprowadzenia matematyki ze zdolności konceptualizacyjnych wyselekcjonowanych w toku ewolucji wydaje się bardzo ciekawa i warta zdecydowanie bardziej szczegółowego przeanalizowania, prezentowany przez nich pogląd w kwestii stosowalności matematyki w naukach na pierwszy rzut oka może wydawać się dość naiwny. Co więcej, o ile

[65] Mam na myśli system kognitywny rozumiany jako *całokształt* zdolności kognitywnych człowieka. Nie chcę wchodzić tu w problem modularności umysłu – być może odwołanie się do modularnej architektury umysłu byłoby bardziej adekwatne, jednak przekracza to zakres niniejszego opracowania.

[66] Por. G. Lakoff, R. Núñez, *op.cit.*, s. 344.

Lakoff i Núñez dość szczegółowo i przekonująco pokazują, jak metafory konstytuują matematykę, nie przedstawiają, w jaki sposób ludzki system kognitywny dopasowuje do siebie obydwie domeny – matematykę oraz świat. Wskazanie konkretnych mechanizmów poznawczych zdecydowanie uprawomocniłoby teorię. Kwestią istotną dla całej teorii metafor rozwijanej w ramach lingwistyki kognitywnej byłoby również dostarczenie bardziej szczegółowej podbudowy neurobiologicznej i antropologicznej.

Z drugiej strony, realizm matematyczny i hipoteza matematyczności świata również są problematyczne. Heller wymienia trzy składowe hipotezy matematyczności świata: matematykę, świat i umysł. O ile w kwestii dwóch pierwszych składowych jego poglądy są jasne, nie formułuje on stanowiska w kwestii trzeciej z nich. Podobnie jak w przypadku Lakoffa i Núñeza nie wiadomo do końca, jak umysł stosuje matematykę do opisu świata. Co za tym idzie, hipoteza matematyczności świata nie wyjaśnia w pełni pytania: „dlaczego i co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?".

Co więcej, realistyczne poglądy w kwestii dwóch pierwszych składowych mają charakter aprioryczny. Jak wspomniano we wcześniejszej części opracowania, jedną z przytaczanych przez Hellera racji na rzecz realizmu matematycznego jest rozumowanie przypominające argument z niezbędności Quine'a-Putnama. Ponieważ formalizm matematyczny jest integralną częścią teorii naukowych, obiekty matematyczne odnoszące się do rozważanej teorii *T* traktować należy dokładnie w taki sam sposób jak wszystkie inne obiekty postulowane przez teorię *T*. Zatem konsekwentny realista naukowy musi być realistą matematycznym. Jeśli za przesłankę tego argumentu przyjmie się jednak antyrealizm naukowy (np. instrumentalizm), konsekwencją dla dziedziny filozofii matematyki będzie także przyjęcie pewnej formy antyrealizmu (np. nominalizmu, konstruktywizmu). Problem nie jest więc rozwiązany, ale relegowany na inny poziom (z filozofii matematyki do filozofii nauki). Stąd też stwierdzić można, że założenie realizmu matematycznego, który nierozerwalnie wiąże się z hipotezą matematyczności świata Hellera, ma charakter aprioryczny.

Realizm uwikłany jest również w inne problemy. Żeby ograniczyć się tylko do teoriopoznawczych, wymienić należy wspomniany już problem braku związku kauzalnego pomiędzy platońskimi bytami matematycznymi i poznającymi je matematykami. Na gruncie platonizmu problem ten rozwiązać można poprzez zapostulowanie intuicji matematycznej, która pozwalałaby na bezpośredni ogląd platońskiego uniwersum. Rozwiązanie takie znów ukazuje aprioryczny charakter platonizmu i co więcej

– jest wysoce problematyczne, jeśli poważnie traktuje się *neuroscience*. Jako kolejny argument za platonizmem przywołać można by doświadczenie uprawiania matematyki, które przez wielu uczonych interpretowane jest jako kontakt z istniejącą obiektywnie rzeczywistością[67], jest to jednak doświadczenie ze swej natury subiektywne, toteż nie może stanowić ostatecznego głosu w dyskusji. W tej sytuacji stwierdzić trzeba, że obydwie perspektywy – hipoteza matematyczności świata, jak i matematyczność ucieleśniona – nie są w pełni satysfakcjonujące. Aprioryczne obciążenie realizmu matematycznego ma jednak charakter fundamentalny, zaś wspomniane braki matematyczności ucieleśnionej mogą zostać (przynajmniej tak się wydaje) uzupełnione.

Konfrontując ze sobą obydwie perspektywy, zaproponować można dwa konkurencyjne rozwiązania. Pierwsze z nich polegałoby na takim zreinterpretowaniu propozycji Lakoffa i Núñeza, aby wspierała hipotezę matematyczności świata Hellera. W takim ujęciu uznać należałoby zastrzeżenie Hellera kierowane w stronę prac Stanislasa Dehaene'a i Jean-Pierre'a Changeux, zgodnie z którym teorie kognitywistyczne nie mówią nic na temat ontologii matematyki. Matematyka ucieleśniona stałaby się wtedy tylko teorią epistemologiczną (mówiłaby, nie czym jest matematyka i jaki jest świat, ale w jaki sposób poznajemy matematykę i rzutujemy ją na świat). Uznać można by wówczas istnienie własności *M*, dzięki której ucieleśniony umysł przypasowuje matematykę do świata fizycznego, jednak należy pamiętać, że rozwiązanie takie jest sprzeczne z poglądami Lakoffa i Núñeza.

W drugim z rozwiązań perspektywa matematyki ucieleśnionej przedstawia się jako konkurencyjna wobec hipotezy matematyczności świata. W związku z tym, że w paradygmacie *embodied mind* zdolności kognitywne badane są jako powstałe w wyniku interakcji organizmu z otaczającą go rzeczywistością fizyczną, społeczną oraz kulturową, matematyczność ucieleśnioną trudno uznać również za przypadek szczególny kantowskiej matematyczności podmiotu. Podobnie jak w przypadku omawianego wcześniej pojęcia prawdy w paradygmacie ucieleśnionego umysłu matematyczność – jeśli wolno użyć tego określenia – jest raczej relacją pomiędzy podmiotem a rzeczywistością. Matematyczność ucieleśniona przedstawia się w tym wypadku jako trzecia, samodzielna opcja. Warto zauważyć, że Lakoff i Núñez odnoszą się wprost do wszystkich trzech wymienionych przez Helle-

[67] Por. R. Penrose, *op.cit.*

ra aspektów pytania „dlaczego i co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?”, czyli matematyki, świata oraz umysłu, a zatem ich koncepcję można potraktować jako pełnoprawną odpowiedź na postawione pytanie.

Matematyka i metafizyka znaturalizowana?

Lingwistyka kognitywna – z Lakoffowską teorią metafor na czele – w połączeniu z naukami ewolucyjnymi dostarczają narzędzi, które jak się wydaje, mogą w pewnej mierze pomóc odpowiedzieć na pytanie, dlaczego tworzone są określone założenia filozoficzne. Paradygmat *embodied mind* przyczynić może się zatem do odpowiedzi nie tylko na pytanie, jak umysł tworzy matematykę, ale również jak tworzy metafizykę. Pierwotne struktury znaczące odnoszą się do interakcji podmiotu z makroskopową (a nie np. kwantową) rzeczywistością fizyczną. Naturalnym sposobem tworzenia przez mózg mentalnych reprezentacji rzeczywistości fizycznej jest wyodrębnianie ze strumienia danych zmysłowych obiektów. Obiekty te podlegają następnie kategoryzacji ze względu na prototypy[68]. W ten sposób świat postrzegany jest przez ludzi jako dyskretny i ustrukturyzowany (złożony ze stołów, krzeseł, samochodów itd.). Jednym z podstawowych doświadczeń człowieka jest manipulacja obiektami. Odpowiednie metafory – dokładniej wyróżnione przez Lakoffa i Johnsona **metafory ontologiczne** – pozwalają przenosić cechy strukturalne tych przedmiotów na domenę pojęć abstrakcyjnych[69]. Zilustrować można to jednym z przykładów opisywanych w *Metaforach w naszym życiu*. Dzięki metaforze **Umysł to maszyna** sens uzyskują wypowiedzi z języka potocznego takie jak: „mój umysł po prostu nie funkcjonuje jak należy” czy też „coś mi się dzisiaj zacina”[70]. Dzięki metaforom ontologicznym obiekty i zjawiska abstrakcyjne mogą być wskazywane i kwantyfikowane, rozpoznawane mogą być ich aspekty, a także mówić można o ich przyczynach i celach. W związku ze zjawiskiem przenoszenia cech strukturalnych możliwe jest zaproponowanie wytłumaczenia genezy stanowiska platonizmu matematycznego. Codzienne doświadczenia manipulacji obiektami przenoszone są na domenę bytów matematycznych, czego

[68] Por. E.H. Rosch, *op.cit.*
[69] Por. G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, *op.cit.*, s. 55-57.
[70] Por. *ibidem*, s. 58.

konsekwencją jest to, że matematycy, po pierwsze, często reifikują obiekty matematyczne, po drugie, sądzą, że obiekty te niezależne są od badaczy, po trzecie zaś, wyobrażają sobie, że widzą obiekty, którymi manipulują[71]. Propozycja ta jest oczywiście wysoce spekulatywna i domaga się dalszego opracowania. Mimo tego, że nie stanowi ona jednoznacznego argumentu za przyjęciem ontologicznej interpretacji propozycji Lakoffa i Núñeza, pozwala sądzić, że paradygmat *embodied mind* ma dużą moc eksplanacyjną, w związku z czym może być on narzędziem pozwalającym ujrzeć w nowym świetle wiele klasycznych problemów filozoficznych.

[71] Por. W.P. Grygiel, M. Hohol, *op.cit.*