Hohol M., Cipora, K. (2015). Perspektywy i granice ucieleśnionego poznania matematycznego. W: R. Murawski (red.), Filozofia matematyki i informatyki (119-140). Kraków: Copernicus Center Press

Mateusz Hohol
Zakład Logiki i Kognitywistyki, Polska Akademia Nauk
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych
Krzysztof Cipora
Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych

Perspektywy i granice ucieleśnionego poznania matematycznego

1. Wprowadzenie

Choć empiryzm obecny jest w filozoficznych dociekaniach nad matematyką od dawna, dopiero w ostatnich dekadach, dzięki konsekwentnemu stosowaniu, a także przenikaniu się metod psychologicznych, lingwistycznych i neuronaukowych narodziła się dziedzina określana jako poznanie matematyczne (*mathematical cognition*) bądź kognitywistyka matematyki (*cognitive science of mathematics*).

Eksperymentalni badacze umysłu wykazują zainteresowanie liczbami co najmniej od lat sześćdziesiątych XX wieku, kiedy osiągnięto kilka rezultatów, podważających zdroworozsądkowe intuicje na temat liczb. Okazało się między innymi, że w naszym umyśle liczby nie są reprezentowane w postaci kodu cyfrowego (jak podpowiada zdrowy rozsądek), ale analogowo – bardziej przypominają one „umysłowe obrazy". Wskazuje na to efekt dystansu numerycznego: szybciej porównujemy liczby znacznie różniące się wielkością, zaś wolniej liczby, których wartość różni się niewiele[1]. Wiadomo również, że mniej czasu zabiera nam porównywanie małych liczb, a więcej

[1] Zob. R.S. Moyer, T.K. Landauer, *Time Required for Judgments of Numerical Inequality*, „Nature" 1967, nr 215, s. 1519–1520.

liczb o dużej wartości (zjawisko to nazywane jest efektem rozmiaru)[2]. Ważnym rezultatem było także odkrycie, że zarówno ludzie, jak pozostałe naczelne oraz niektóre inne zwierzęta dysponują „zmysłem numerycznym" (*the number sense*) – na który składają się przejawiające się bardzo wcześnie (w sensie ontogenetycznym) systemy mózgowe, pozwalające szybko i precyzyjnie oceniać liczebność niewielkich zbiorów (zdolność ta określana jest jako subitacja) oraz szacować liczebność większych zbiorów (estymacja)[3].

Droga od badań na temat tego, w jaki sposób ludzie kwantyfikują liczebności i *postrzegają* liczby do badań natury *pojęć* matematycznych jest jednak daleka. Naszym zdaniem najbardziej obiecującym podejściem w tym względzie jest zastosowanie paradygmatu umysłu i poznania ucieleśnionego. W podejściu tym genezy pojęć abstrakcyjnych – w tym matematycznych – upatruje się w doświadczeniach sensoryczno-motorycznych podmiotu oraz jego interakcjach ze środowiskiem fizycznym oraz społecznym.

W niniejszym artykule przedyskutujemy zarówno perspektywy, jak i ograniczenia zastosowania paradygmatu ucieleśnionego umysłu w badaniach nad poznaniem matematycznym[4]. Aby tego dokonać przyjrzymy się trzem dziedzinom, które zaliczyć można do badań nad ucieleśnionym umysłem matematycznym; są nimi: (1) liczenie na

---

[2] Por. K. Cipora, E. Nęcka, *Kontinua a przestrzeń – przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia*, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 2012, nr 26, s. 7–21.

[3] Zob. S. Dehaene, *The Number Sense. How the Mind Created Mathematics,* Revisted and Expanded Edition, Oxford University Press, Oxford – New York 2011; por. także B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, Copernicus Center Press, Kraków 2014, rozdz. 1, oraz M. Trojan, *Na tropie zwierzęcego umysłu*, Scholar, Warszawa 2013, rozdz. 7.

[4] Nie podejmujemy natomiast sporu o *ontologiczny* status obiektów/struktur matematycznych w kontekście odkryć kognitywistyki. Odkrycia te interpretowane są zazwyczaj na korzyść nominalizmu (por. np. A. Frąckowiak-Ciesielska, *Blaski i cienie współczesnych koncepcji nominalistycznych w filozofii matematyki*, [w:] *Światy matematyki – tworzenie czy odkrywanie? Księga Pamiątkowa ofiarowana Profesorowi Romanowi Murawskiemu*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2010, s. 159–176), jednak możliwe są próby uspójnienia ich z realizmem matematycznym (por. B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematycznyop. cit.*, rozdz. IV–V).

palcach, (2) matematyczne metafory pojęciowe oraz (3) efekt zależności przestrzennej między liczbą a rodzajem odpowiedzi (w skrócie efekt SNARC, od *spatial-numerical association of response codes*).

2. W stronę ucieleśnienia umysłu

Potocznie matematyka postrzegana jest często jako nauka, której pojęcia są w najwyższym stopniu abstrakcyjne i niezależne od człowieka oraz fizycznego świata. Zarówno tradycja filozofii matematyki, zapoczątkowana przez pitagorejczyków i Platona, jak i interpretacja sukcesów zastosowań metody matematycznej w opisie i modelowaniu przyrody[5], spójna jest z tym potocznym punktem widzenia. Co więcej, tak rozumiana matematyka postrzegana jest niekiedy jako „model" dla innych dyscyplin, takich jak filozofia, roszczących sobie pretensje do ostatecznego zrozumienia rzeczywistości. W takim ujęciu – zgodnie z rekonstrukcją Stanisława Krajewskiego:

> Pojęcia matematyczne są poza czasem, przestrzenią, wcieleniem. Matematyk nie ma ciała. Jest czystym umysłem. Dla wielu filozofów jest podobnie. Bezcielesny jest na przykład czysty podmiot, podmiot transcendentalny. Matematyk i tradycyjny filozof rozumie się jako umysł bez ciała i bez jakiegokolwiek uwikłania społecznego[6].

Co ciekawe, podejście to nie jest bardzo odległe zarówno od programowych założeń, jak i praktyki wczesnej kognitywistyki. Współcześnie rozumiana jest ona jako multi/interdyscyplinarny projekt, jednoczący takie dziedziny, jak psychologia, antropologia, neuronauka

[5] Zob. E.P. Wigner, *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, red. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002, s. 293–309.
[6] S. Krajewski, *Czy matematyka jest nauką humanistyczną?*, Copernicus Center Press, Kraków 2011, s. 101. Cytat opisuje jeden z elementów poglądu filozoficznego, określanego mianem „matematyzmu".

i filozofia, mający na celu lepsze zrozumienie umysłu i natury ludzkiej. Od swych narodzin w latach pięćdziesiątych ubiegłego stulecia tożsamość kognitywistyki wyznaczały jednak nauki komputerowe: informatyka i sztuczna inteligencja, bazujące na naukach formalnych – matematyce, logice i teorii obliczalności. W badaniach prowadzonych przez uczonych, takich jak: Alan Turing, Herbert Simon, Allen Newell, George Miller czy Noam Chomsky, przyjęte zostało podejście, wedle którego umysł to maszyna operująca na abstrakcyjnych reprezentacjach.

W krytycznej pracy *The Mind Doesn't Work That Way* Jerry Fodor stwierdza, że wśród założeń wczesnej, „obliczeniowej" kognitywistyki znaleźć można następujące tezy: po pierwsze, myśli mogą być przyczynami zachowań organizmu, gdyż posiadają określoną formę logiczną (teza o przyczynowości). Po drugie, forma logiczna definiowana jest na składni reprezentacji mentalnych (jest to teza o reprezentacjach). Ponadto, obliczenia przeprowadzane na reprezentacjach są uniwersalne (jest to teza o uniwersalności obliczeń)[7]. Co za tym idzie, dla wczesnych kognitywistów umysł miał się do mózgu tak, jak *software* do *hardware* komputera.

Zadaniem badacza było *przede wszystkim* coraz lepsze rozumienie umysłu-programu komputerowego, bez konieczności zagłębiania się w mózgowy *hardware* oraz interakcje ciała ze środowiskiem fizycznym i społecznym. Zaryzykować można uogólnienie, że we wczesnej kognitywistyce, podobnie jak w potocznie rozumianej matematyce oraz co najmniej części filozofii, dominowała odcieleśniona wizja podmiotu i umysłu.

Jednak w latach osiemdziesiątych XX wieku – jak zauważają Bechtel, Abrahamsen i Graham – „kognitywistyka zaczęła jednocześnie rozwijać się wertykalnie (w głąb, w stronę mózgu) oraz horyzontalnie (na zewnątrz, w stronę środowiska)"[8]. Filozoficzny funk-

[7] Zob. J.A. Fodor, *The Mind Doesn't Work That Way. The Scope and Limits of Computational Psychology*, The MIT Press, Cambridge, MA 2000.
[8] W. Bechtel, A. Abrahamsen, G. Graham, *The Life of Cognitive Science*, [w:] *A Companion to Cognitive Science*, red. W. Bechtel, G. Graham, Blackwell, Oxford 1998, s. 90.

cjonalizm[9], będący teoretyczną podbudową komputerowej metafory umysłu, ustępować zaczął miejsca dociekaniom na temat roli ciała i motoryki w poznaniu oraz kształtowaniu myśli[10]. Za jednego z prekursorów kognitywistyki drugiej generacji uznać można George'a Lakoffa, który wraz ze współpracownikami zakwestionował kluczowe tezy generatywizmu Noama Chomsky'ego – teorii będącej jednym z najważniejszych osiągnięć obliczeniowej kognitywistyki. Według Lakoffa i Johnsona:

> Nie istnieje ktoś taki jak człowiek obliczeniowy (…), którego umysł jakimś sposobem wytwarza znaczenie, otrzymując pozbawione znaczenia symbole „na wejściu", przetwarzając je zgodnie z regułami i ponownie generując „na wyjściu". Prawdziwi ludzie mają umysły ucieleśnione, a ich systemy pojęciowe powstają dzięki żywemu ciału, są przez nie ukształtowane i dzięki niemu posiadają znaczenie. Sieci neuronowe w naszych mózgach wytwarzają systemy pojęciowe i struktury językowe, których nie da się adekwatnie wyjaśnić jedynie za pomocą przetwarzających symbole systemów formalnych[11].

Idea ucieleśnionej kognitywistyki w dużym uproszczeniu oznacza, że umysł i poznanie kształtowane są – zarówno w perspektywie filogenetycznej, ontogenetycznej jak i w chwili bieżącej – przez doświadczenia naszych ciał eksplorujących przestrzeń[12]. Podstawowe schematy umysłowe tworzone są przez neuronalne programy kontroli motorycznej w interakcjach ze środowiskiem. Chociaż idea ucieleśnio-

---

[9] Por. np. J. Bremer, *Wprowadzenie do filozofii umysłu*, WAM, Kraków 2010, s. 121–135.

[10] Zagadnienie to obecne było wcześniej m.in. w fenomenologii; zob. M. Merleau-Ponty, *Fenomenologia percepcji*, tłum. M. Kowalska, J. Migasiński, Aletheia, Warszawa 2003.

[11] G. Lakoff, M. Johnson, *Co kognitywizm wnosi do filozofii*, tłum. A. Pawelec, „Znak" 1999, nr 11, s. 245–263.

[12] Ucieleśnione poznanie, rozumiane jako paradygmat kognitywistyki oraz neuronauki poznawczej, omówione zostało bardziej systematycznie przez jednego z nas w: M. Hohol, *Wyjaśnić umysł. Struktura teorii neurokognitywnych*, Copernicus Center Press, Kraków 2013, s. 125–153.

nego poznania konkretyzowana jest przez różnych badaczy (filozofów, neuronaukowców, psychologów i lingwistów) na konkurencyjne sposoby – na potrzeby niniejszej pracy scharakteryzować można ją za Margaret Wilson za pomocą sześciu tez[13]. Po pierwsze, poznanie jest usytuowane, co oznacza, że odbywa się w realnym środowisku fizycznym, które wywiera wpływ na poznający podmiot. Po drugie, poznanie przebiega pod presją czasu. Po trzecie, poznając przenosimy ciężar poznawczy na otoczenie – wykorzystujemy środowisko do przechowywania informacji i manipulowania nimi, zmniejszając dzięki temu naturalne ograniczenia (np. pamięci roboczej). Po czwarte, środowisko jest częścią systemu poznawczego, co oznacza, że przepływ informacji między podmiotem a środowiskiem jest tak gęsty, że skupianie uwagi na samym podmiocie pozbawione jest badawczego sensu. Po piąte, podstawowym celem umysłu jest działanie w środowisku fizycznym i społecznym. Mechanizmy percepcyjne i poznawcze rozumiane powinny być jako służące skutecznemu działaniu w świecie. Wreszcie, po szóste, poznanie *off-line* również ugruntowane jest w ciele i działaniu. Przez poznanie *off-line* rozumieć należy w tym kontekście poznanie, które przebiega bez pełnej interakcji ze środowiskiem. Nawet wówczas, gdy nie znajdujemy się w ruchu ani nie wykonujemy działań motorycznych, aktywność poznawcza ucieleśnionego podmiotu opiera się na mechanizmach sensoryczno-motorycznych.

Jednym z obszarów aktywności ludzkiej, w którym ujawnia się poznanie *off-line* (w podanym wyżej sensie) jest matematyka. Badacze ucieleśnionego poznania próbują wyjaśnić, jak możliwe jest przejście od sfery obiektów konkretnych, doświadczanych cieleśnie i ujmowanych pojęciowo, poprzez wrodzone, elementarne zdolności kwantyfikacji liczebności, określane mianem „zmysłu numerycznego", do sfery abstrakcyjnych pojęć matematycznych[14]. Naszym zdaniem pomocne są tu trzy obszary badawcze, jakimi są: liczenie na

[13] M. Wilson, *Six Views of Embodied Cognition*, „Psychonomic Bulletin & Review" 2002, t. 9, nr 4, s. 625–636.
[14] Por. G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York 2000.

palcach, metafory pojęciowe, funkcjonujące na gruncie matematyki oraz badania nad efektem SNARC.

3. Więcej niż stadium rozwojowe: liczenie na palcach

Wspomaganie się palcami podczas liczenia uznawane było do niedawna jedynie za przejściowy i przygodny etap w rozwoju poznawczym dziecka. Jednak współcześnie raczej sądzi się, że czynność ta ma głębokie znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych dzieci[15], wywarła ona istotny wpływ na ewolucję systemów numerycznych, czego przejawem jest stosowanie systemu dziesiętnego[16], a także odgrywa ważną rolę w poznaniu matematycznym u osób dorosłych (wspomagających się palcami np. przy obliczeniach kalendarzowych). Co więcej, dane neuropsychologiczne oraz badania eksperymentalne z wykorzystaniem technik neuroobrazowania wskazują, że na poziomie mózgu motoryczne reprezentacje palców powiązane są z reprezentacjami liczb[17]. Sprawia to – jak zauważają Fischer i Brugger – że zagadnienie liczenia na palcach jest dobrym polem testowania idei ucieleśnionego poznania[18].

Wspomnieliśmy wcześniej, że zarówno dzieci, już na bardzo wczesnych etapach ontogenezy, jak i niektóre zwierzęta, wyposażone

[15] Przegląd badań rozwojowych na temat liczenia na palcach zaprezentowaliśmy w: M. Szczygieł, K. Cipora, M. Hohol, *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, „Psychologia rozwojowa" 2015, t. 20, nr. 3.

[16] Por. B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, London 1999; G. Ifrah, *Historia powszechna cyfr*, Tom 1, tłum. K. Marczewska, W.A.B., Warszawa 2006, rozdział 3.

[17] W tej części artykułu opieramy się na naszym przeglądzie badań: K. Cipora, M. Szczygieł, M. Hohol, *Palce, które liczą: znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego*, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 2014, nr 30, s. 59–73.

[18] M.H. Fischer, P. Brugger, *When Digits Help Digits: Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 41–47.

są w „zmysł numeryczny”[19], odpowiedzialny za przetwarzanie informacji na temat ilości. Zmysł ten posiada jednak silne ograniczenia – przykładowo ludzie zdolni są do subitacji (przypomnijmy: szybkiej, bezwysiłkowej i precyzyjnej oceny liczebności) tylko około czterech elementów[20]. Z drugiej strony wiemy, że w rozwoju matematyki – w perspektywie historycznej – jak i doskonaleniu kompetencji matematycznych dzieci, ogromną rolę odgrywa symboliczny system liczbowy. Zdaniem niektórych badaczy to właśnie umiejętność liczenia na palcach jest łącznikiem pomiędzy „zmysłem numerycznym” oraz stosowaniem symboli matematycznych[21].

Zaobserwować można podobieństwo między liczeniem na palcach i posługiwaniem się liczbami naturalnymi – stałej kolejności palców odpowiada ustalona sekwencja odliczania. Wiese zauważa z kolei, że posługiwanie się palcami, zajmującymi stałą pozycję w ciele, pozwala przejść od reprezentacji o charakterze ikonicznym, gdzie jeden obiekt odpowiada jednemu palcowi, do zapisu symbolicznego[22]. Co więcej, określona kolejność liczenia jest istotna dla przyporządkowywania konkretnym wielkościom odpowiednich symboli liczbowych. W związku z tym Wiese proponuje scenariusz ewolucyjny, w którym podstawą dla tworzenia symbolicznego systemu liczbowego było liczenie na palcach.

Jak wspomnieliśmy, w mózgu reprezentacje motoryczne palców powiązane są z reprezentacjami liczb. Już pod koniec pierwszej po-

[19] Por. także K. Cipora, M. Szczygieł, *Wyścig Liczb – The Number Race – polska wersja językowa narzędzia wczesnej interwencji w przypadku ryzyka dyskalkulii rozwojowej oraz wspomagania rozwoju kompetencji arytmetycznych*, „Psychologia-Etologia-Genetyka” 2013, nr 27, s. 71–85.

[20] Dyskusję teorii przekraczania bariery czterech elementów Czytelnik znajdzie w: B. Brożek, M. Hohol, *Umysł matematyczny*, *op. cit.*, rozdz. 1.

[21] Por. S. Di Luca, M. Pesenti, *Masked Priming Effect with Canonical Finger Numeral Configurations*, „Experimental Brain Research” 2008, t. 185, nr 1, s. 27–39; M. Fayol, X. Seron, *About numerical representations: Insights from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies*, [w:] *Handbook of Mathematical Cognition*, red. J.I. Campbell, Psychology Press, New York 2005, s. 3–22.

[22] Por. H. Wiese, *Numbers, Language and Human Mind*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.

łowy XX wieku zauważył to Joseph Gerstmann, który opisał zespół objawów towarzyszących lezji lewego zakrętu kątowego. Należą do nich między innymi agnozja palców i akalkulia[23]. Nowsze badania eksperymentalne ujawniają natomiast, że zdrowe osoby badane wykazują problemy z wykonywaniem zadań obliczeniowych, gdy eksperymentator porusza ich palcami[24]. Nawet biernej obserwacji małych liczb towarzyszą aktywacje kory ruchowej, związanej z ruchami palców[25]. Co więcej, badania z użyciem przezczaszkowej stymulacji magnetycznej pokazują, że wykonywaniu zadań arytmetycznych towarzyszą zmiany w pobudliwości korowej dla mięśni rąk[26]. Jedna z hipotez – najbardziej spójna z ideą ucieleśnienia – wyjaśniających wspólne aktywacje mózgowych reprezentacji palców i liczb głosi, że neurony odpowiedzialne za gnozję palców na skutek biologicznej egzaptacji przyjęły nową, dodatkową rolę, jaką jest reprezentowanie liczb, nie tracąc przy tym swojej funkcji pierwotnej[27]. Konkurencyjną – mniej spójną z ideą ucieleśnionego poznania – jest natomiast hipoteza, zgodnie z którą to bliskość obwodów nerwowych, zasilanych przez te same naczynia krwionośne, wyjaśnia wspólne aktywacje.

Pojmowanie liczenia na palcach jako jednego z przejawów ucieleśnionego poznania napotyka również na inne problemy – związane są one ze zróżnicowaniem wewnątrz- i międzykulturowym. Pomimo tego, że liczenie na palcach jest fenomenem powszechnym, obserwuje się różnorodność pod względem rozpoczynania liczenia (od lewej lub

[23] Por. D. Darby, K. Walsh, *Neuropsychologia kliniczna Walsha*, tłum. B. Mroziak, GWP, Gdańsk 2008, s. 263.
[24] I. Imbo, A. Vandierendonck, W. Fias, *Passive Hand Movements Disrupt Adults' Counting Strategies*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 48–52.
[25] N. Tschentscher, O. Hauk, M.H. Fischer, F. Pulvermüller, *You Can Count on the Motor Cortex: Finger Counting Habits Modulate Motor Cortex Activation Evoked by Numbers*, „Neuroimage" 2012, t. 59, nr 4, s. 3139–3148.
[26] M. Sato, L. Cattaneo, G. Rizzolatti, V. Gallese, *Numbers Within our Hands: Modulation of Corticospinal Excitability of Hand Muscles During Numerical Judgment*, „Journal of Cognitive Neuroscience" 2007, t. 19, nr 4, s. 684–693.
[27] M. Penner-Wilger, M.L. Anderson, *An Alternative View of the Relation between Finger Gnosis and Math Ability: Redeployment of Finger Representations for the Representation of Numer*, [w:] *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, Cognitive Science Society, Austin 2008, s. 1647–1652.

prawej ręki; pomimo kontroli ręczności), wskazywania liczebności (np. przy zamawianiu napojów) oraz samej techniki liczenia[28]. Ponieważ różnice można dojrzeć nawet wśród Europejczyków, odwołanie się do standardowych wyjaśnień związanych z kierunkiem czytania jest niewystarczające. Różnorodność ta wskazuje, że procesy kulturowego uczenia się mogą w istotnym stopniu modyfikować ukształtowane w trakcie filogenezy predyspozycje ucieleśnionego umysłu.

4. Metafora: narzędzie kształtowania pojęć matematycznych

Omawiając obliczeniowy paradygmat kognitywistyki, „wyparty" przez ucieleśnioną kognitywistykę, wspomnieliśmy, że jednym z kluczowych programów badawczych, powstałych na gruncie tego pierwszego, było językoznawstwo generatywne Noama Chomsky'ego. Jedną z kluczowych tez tego projektu było podkreślenie, że akwizycja i rozumienie języka możliwe są dzięki obliczeniowemu modułowi umysłowemu, który obejmuje podstawowe struktury syntaktyczne.

George Lakoff i jego współpracownicy zaproponowali alternatywną wizję języka, w której podkreślili, że pojęcia abstrakcyjne tworzone i rozumiane są na bazie pojęć konkretnych – opartych na schematach wyobrażeniowych wytworzonych w sensoryczno-motorycznych interakcjach ze środowiskiem – dzięki działaniu metafor pojęciowych[29]. W tym kontekście metafora rozumiana jest nie jako zjawisko czysto językowe, ale jako mechanizm poznawczy, a więc funkcjonujący na poziomie ucieleśnionego umysłu, którego efekty widoczne są *również* na poziomie języka. Metafora to „rozumienie

[28] A. Bender, S. Beller, *Fingers as a tool for counting – naturally fixed or culturally flexible?*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 10–12. Szczegółowy przegląd badań Czytelnik znajdzie w przedostatniej sekcji pracy *Palce, które liczą…*, *op. cit.*, s. 67–69.

[29] G. Lakoff, M. Johnson, *Metafory w naszym życiu*, tłum. T. Krzeszowski, Aletheia, Warszawa 2010, s. 31.

i doświadczanie pewnego rodzaju rzeczy w terminach innej rzeczy”[30]. Precyzyjniej, metafora pojęciowa:

> stanowi odwzorowanie przedmiotów jednej dziedziny na przedmioty innej dziedziny. Jako takie, metafory pojęciowe są częścią naszego systemu myśli. Ich podstawową funkcją jest umożliwić nam rozumowanie o dziedzinach relatywnie abstrakcyjnych z użyciem struktury inferencyjnej charakterystycznej dla dziedziny relatywnie konkretnej[31].

Teoria metafor znalazła szybko zarówno wielu zwolenników, co i przeciwników. Prócz dyskursu potocznego, w którym np. abstrakcyjne pojęcie „miłość” pojmowane może być za pośrednictwem pojęcia „podróży” („idziemy razem przez życie”; „związek znalazł się na rozdrożu”) – teoria ta zaaplikowana została do analizy pojęć z zakresu polityki, filozofii, a także matematyki[32].

Podobnie jak w przypadku języka, zwolennicy teorii ucieleśnionego poznania odrzucają ideę istnienia wrodzonego modułu umysłowego „odpowiedzialnego” za matematykę. Trafnie ujmuje to Michael Tomasello:

> Różnice między kulturami są dużo wyraźniejsze niż w przypadku języków mówionych. Wszystkie kultury mają bowiem bardzo złożone systemy komunikacji językowej (…), podczas gdy tylko niektóre wytworzyły wysoce złożone systemy matematyczne (w dodatku „praktykowane” tylko przez niektórych ich członków). Inne kultury zadowalają się prostymi systemami liczenia (…). Ta wielka różnorodność powoduje, że żaden teoretyk nie sądzi, iż struktura złożonej matema-

30 *Ibidem*, s. 31.
31 G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From*, *op. cit*., s. 42.
32 Zwięzłą dyskusję ucieleśnionej koncepcji pojęć Czytelnik znajdzie np. w: R.W. Gibbs, Jr., *Embodiment and Cognitive Science*, Cambridge University Press, Cambridge 2005, rozdz. 4.

tyki współczesnej wynika z posiadania wrodzonego modułu, jak to się zdarzało w przypadku języka[33].

George Lakoff i Rafael Núñez uznają istnienie wrodzonych zdolności określania liczebności („zmysł numeryczny"), jednak twierdzą, że wyjaśnienie matematyki w całej swej złożoności i bogactwie wymaga uwzględnienia teorii metafor pojęciowych. Twierdzą oni, że abstrakcyjne pojęcia matematyczne bazują na konkretnych – a więc dobrze zrozumiałych – pojęciach potocznych. Przykładowo, matematyczne pojęcie *zbioru* czy *klasy* opiera się na wykorzystywanym na co dzień pojęciu zespołu przedmiotów, zgromadzonych w ograniczonym fragmencie przestrzeni (np. pojemniku). Pojęcie *rekursji* wykorzystuje intuicje związane z powtarzającymi się działaniami. Z kolei pojęcie *pochodnej*, znane z analizy matematycznej – zdaniem Lakoffa i Núñeza – opiera się na pojęciach ruchu oraz zbliżania się do granicy[34]. W swojej pracy badają oni działy matematyki, takie jak arytmetyka, algebra Boole'a, teoria mnogości czy analiza matematyczna. Przykładowo arytmetyka – jak przekonują kognitywiści – opiera się na czterech metaforach ugruntowujących, które bazują na pojęciach: zbioru przedmiotów, konstrukcji przedmiotu, pomiaru za pomocą pręta oraz ruchu wzdłuż ścieżki. Ich uwaga skupia się także na pojęciach matematycznych, takich jak „nieskończoność" czy „ciągłość" oraz charakterystycznych cechach matematyki – migracji pojęć pomiędzy różnymi działami i teoriami oraz poszukiwaniu podstaw (*foundations*). Przedmiotem ich zainteresowania jest wreszcie „najpiękniejszy wzór świata" – równanie Eulera ($e^{\pi i} + 1 = \mathbf{0}$), które łączy funkcje trygonometryczne z zespoloną funkcją wykładniczą.

Teoria Lakoffa i Núñeza spotkała się z silną krytyką. Koncepcji tej zarzuca się m.in. wysoki poziom spekulatywności, słabe potwierdzenie empiryczne i nieuwzględnienie bogactwa współczesnej ma-

[33] Zob. M. Tomasello, *Kulturowe źródła ludzkiego poznawania*, tłum. J. Rączaszek, PIW, Warszawa 2002, s. 64.

[34] Zob. G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From*, *op. cit.*, *passim*.

tematyki, zaś jej twórcom słabą znajomość samej matematyki oraz historii tej dyscypliny[35]. Aby zobrazować jeden z zarzutów przyjrzyjmy się następującej anegdocie, przytoczonej przez Andrzeja Mostowskiego:

> Dedekind wyraził się odnośnie pojęcia zbioru jak następuje: wyobraża on sobie zbiór jako zamknięty worek, który zawiera zupełnie określone przedmioty; przedmiotów tych jednak nie widzimy i nie wiemy o nich nic, poza tym, że istnieją i są określone. W pewien czas później Cantor sformułował swój pogląd na zbiory: uniósł swą ogromną figurę, podniesionym ramieniem zatoczył wielki łuk i kierując swój wzrok w nieokreślony punkt powiedział: ja wyobrażam sobie zbiór, jak przepaść[36].

Powołując się na Mostowskiego Jerzy Pogonowski zauważa, że:

> sytuacja we współczesnej teorii mnogości raczej skłania do przychylenia się do wizji Cantora: aksjomaty teorii mnogości charakteryzują pojęcie zbioru w sposób daleki od kategoryczności lub nawet semantycznej zupełności. Dowodzą tego znane twierdzenia o niezupełności teorii mnogości[37].

Zdaniem krytyków, ucieleśnione myślenie o matematycznym zbiorze (w sensie dystrybutywnym) jako pojemniku może mieć znaczenie *dydaktyczne*, ale w praktyce matematycznej metafora ta nie jest aż tak ważna, a nawet może wprowadzać w błąd. Zarzut ten nie byłby zbyt poważny – Lakoff podkreśla, że wiele abstrakcyjnych pojęć (np. miłość) pojmowanych może być za pośrednictwem różnych

---

[35] Por. następujące prace Jerzego Pogonowskiego: *Geneza matematyki wedle kognitywistów*, „Investigationes Linguisticae" 2011, t. XXIII, s. 106–114, http://logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf; *Matematyczne metafory kognitywistów*, „LVIII Konferencja Historii Logiki", Kraków 2012, http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf oraz *Matematyczne fantazje kognitywistów*, 2013, http://logic.amu.edu.pl/images/3/32/Mfk2013.pdf.

[36] Cytujemy za: J. Pogonowski, *Matematyczne metafory kognitywistów*, *op. cit.*, s. 6.

[37] *Ibidem*, s. 3.

metafor – gdyby nie to, że pojęcia, z których korzystają matematycy, często „wymykają się” ucieleśnieniu. O ile abstrakcyjny świat matematyki wyłania się ze świata konkretów, system pojęć matematycznych, z których korzystają eksperci, jest przynajmniej w pewnej mierze „odcieleśniony”.

Bez wątpienia propozycja Lakoffa i Núñeza nie wyjaśnia *całej* matematyki i zawiera wiele luk. Podkreślić trzeba jednak, że wskazuje ona na mechanizmy rozumienia i operowania pojęciami matematycznymi – trudno jest znaleźć dla niej teorię konkurencyjną na gruncie kognitywistyki. Co więcej, podkreślić trzeba, że jest to teoria wyjaśniająca poznawczą genezę, a nie historyczny rozwój pojęć matematycznych – wyjaśnienie jak ewoluowały idee matematyczne jest zadaniem historyka nauki, nie zaś badacza umysłu.

Zgodzić trzeba się natomiast z zarzutem niedostatecznego empirycznego potwierdzenia teorii. O ile za prawomocnością samej teorii metafor pojęciowych przemawiają konwergentne dowody, pochodzące z różnych źródeł[38], brakuje danych eksperymentalnych, które wspierałyby postulowanie poszczególnych metafor matematycznych. W psychologii poznania matematycznego istotną rolę odgrywa jednak paradygmat badawczy, który uznać można za próbę weryfikacji jednej z metafor, wskazywanych przez Lakoffa i Núñeza – zagadnieniu temu poświęcamy kolejną część niniejszej pracy.

5. Liczba i przestrzeń: efekt SNARC

Według Lakoffa i Núñeza liczby naturalne konceptualizowane są jako punkty rozmieszczone na osi liczbowej[39]. Jest to przykład metafory

[38] Ich przegląd wraz z pozycjami bibliograficznymi Czytelnik znajdzie w pracy: G. Lakoff, M. Johnson, *Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*, Basic Books, New York 1999, s. 81–87.

[39] G. Lakoff, R.E. Núñez, *Where Mathematics Comes From*, *op. cit.*, s. 339–340; nie wyklucza to innych konceptualizacji liczb naturalnych – np. jako obiektów teoriomnogościowych lub pozycji w kombinatorycznej teorii gier.

pojęciowej, w której abstrakcyjne pojęcie matematyczne (*liczba naturalna*) zrozumiałe jest dzięki odwołaniu do doświadczenia rozmieszczania obiektów w kontinuum. Kontinua, czyli kategorie obiektów, które można ułożyć według ścisłego porządku, reprezentowane są w odniesieniu do ciała.

Jednym z argumentów na rzecz tego, że ludzie rzeczywiście pojmują liczby w taki sposób jest efekt zależności przestrzennej między liczbą a rodzajem odpowiedzi, który określamy dalej jako SNARC (od *spatial-numerical association of response codes*), odkryty w 1993 roku przez Dehaene'a i współpracowników[40]. Efekt polega na tym, że czasy reakcji na liczby o mniejszej wartości są krótsze, gdy reakcje są wykonywane po lewej stronie ciała, podczas gdy czasy reakcji na liczby o większej wartości są krótsze po prawej stronie[41].

Schemat typowego zadania eksperymentalnego, w jakim uzyskuje się efekt SNARC jest bardzo prosty. Osoba badana reagując przy pomocy dwóch rąk klasyfikuje obiekty (w interesującym nas najbardziej wypadku są to liczby) wyświetlane na ekranie do dwóch kategorii. Ze względów metodologicznych w połowie eksperymentu sposób przypisania przycisków reakcyjnych, odpowiadających danym kategoriom jest odwracany. Najczęściej występujące zadania w przypadku liczb, to ocena parzystości oraz klasyfikacja wartości prezentowanej liczby (jako mniejszej lub większej od zadanego z góry kryterium). Zasadnicza różnica między tymi zadaniami polega na tym, że pierwsze z nich nie odwołuje się bezpośrednio do wartości liczby (co ma miejsce w przypadku zadania drugiego typu). Obserwuje się, że czasy reakcji na liczby o małej wartości są krótsze,

---

[40] Zob. S. Dehaene, S. Bossini, P. Giraux, *The Mental Representation of Parity and Numerical Magnitude*, „Journal of Experimental Psychology: General" 1993, nr 122, s. 371–396; por. przegląd literatury: K. Cipora, E. Nęcka, *Kontinua a przestrzeń...*, *op. cit.*

[41] Zob. W. Gevers, B. Reynvoet, W. Fias, *The mental representation of ordinal sequencesis spatially organized*, „Cognition" 2003, nr 87, s. B87–B95; podobne wyniki uzyskano również dla innych kontinuów, takich jak litery alfabetu, dni tygodnia czy nazwy miesięcy.

gdy reakcja wykonywana jest lewą ręką, a na liczby o dużej wartości – w przypadku reagowania prawą ręką[42].

Wyniki eksperymentów tego typu wskazują, że liczby reprezentowane są jako rozmieszczone na poziomej linii – im większa liczba, tym bardziej preferowana jest prawa strona, zaś im mniejsza liczba – strona lewa ciała. W książce *The Number Sense* Stanislas Dehaene ujmuje to w następująco:

> Odnalezienie automatycznego powiązania pomiędzy liczbami a przestrzenią prowadzi do prostej, ale jednocześnie niezwykle potężnej metafory, pozwalającej na umysłową reprezentację wielkości liczbowych: osi liczbowej (*number line*). Wygląda to tak, jakby liczby rozmieszczone były na odcinku w ten sposób, że każde miejsce odpowiada pewnej wielkości. Zbliżone do siebie liczby reprezentowane są w sąsiednich miejscach (...). Co więcej, myślenie metaforyczne pozwala na orientację osi liczbowej w przestrzeni: zero znajduje się skrajnie z lewej strony, większe liczby znajdują się natomiast coraz bardziej na prawo[43].

Efekt SNARC pojawia się u około 70% osób badanych[44]. Co istotne, wyników tych w żaden sposób nie można wyjaśnić samą lateralizacją funkcjonalną mózgu[45]. Dotychczasowe badania z udziałem osób leworęcznych wskazały, że osoby te nie różniły pod tym względem od osób praworęcznych.

Dla efektu SNARC istotne są jednak dwa inne czynniki: zanurzenie kulturowe oraz poziom ekspertywności w zakresie matematyki. Jeśli chodzi o pierwszy z nich, okazuje się – jak twierdzi Dehaene, że

[42] Por. S. Kornblum, T. Hasbroucq, A. Osman, *Dimensional overlap: cognitive basis for stimulus-response compatibility – a model and taxonomy*, „Psychological Review" 1990, t. 97, nr 2, s. 253–270.

43 S. Dehaene, *The Number Sense*, *op. cit.*, s. 70.

[44] Zob. G. Wood, K. Willmes, H.-C. Nuerk, M.H. Fischer, *On the cognitive link between space and number: A meta-analysis of the SNARC effect*, „Psychology Science Quarterly" 2008, t. 50, nr 4, s. 489–525.

[45] G. Wood, H.-C. Nuerk, K. Willmes, *Crossed hands and the SNARC effect: a failure to replicate Dehaene, Bossini and Giraux (1993)*, „Cortex" 2006, nr 42, s. 1069–1079.

„ukierunkowanie związku między liczbami a przestrzenią jest zależne od kierunku pisania”[46]. Zebian pokazała, że u osób, posługujących się językiem arabskim efekt SNARC ma kierunek przeciwny (krótsze czasy reakcji lewą ręką na liczby duże, zaś prawą ręką na liczby małe), natomiast u osób dwujęzycznych, które posługują się językiem arabskim i angielskim kierunek efektu uzależniony był od tego, w jakim wieku dana osoba zaczęła posługiwać się językiem angielskim[47].

Jeśli chodzi natomiast o drugi z czynników, w oryginalnym badaniu Dehaene’a i współpracowników okazało się, że silniejszy efekt SNARC występuje u osób, które nie mają na co dzień styczności z matematyką (w badaniu uczestniczyli studenci literatury) w porównaniu z osobami mającymi na co dzień kontakt z matematyką (badanie obejmowało studentów matematyki, fizyki i biologii)[48]. Z kolei w eksperymencie przeprowadzonym przez nasz zespół, okazało się, że w przeciwieństwie do doktorantów nauk społecznych oraz kierunków technicznych, efekt SNARC nie wystąpił u profesjonalnych matematyków na poziomie dwóch ostatnich lat studiów doktoranckich[49]. Choć jest jeszcze zbyt wcześnie, by wysuwać ostateczną interpretację, wynik ten oznaczać może, że mechanizmy poznawcze, stojące za przetwarzaniem liczb u matematycznych ekspertów, różnią się znacznie w stosunku do reszty populacji. Podsumowując, między postrzeganiem liczb i przestrzeni istnieją silne związki, jednak ich zależność

---

46 S. Dehaene, *The Number Sense*, *op. cit.*, s. 70.

47 S. Zebian, *Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the reverse SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers*, „Journal of Cognition and Culture” 2005, t. 5, s. 165–190.

48 S. Dehaene, S. Bossini, P. Giraux, *The Mental Representation of Parity and Numerical Magnitude*, *op. cit.*; por. także K. Cipora, H.-Ch. Nuerk, *Is the SNARC Effect Related to the Level of Mathematics? No Systematic Relationship Observed Despite More Power, More Repetitions, and More Direct Assessment of Arithmetic Skill*, „The Quarterly Journal of Experimental Psychology” 2013, t. 66, nr 10, s. 1974–1991.

49 Zob. K. Cipora, M. Hohol, H.-C. Nuerk, K. Willmes, B. Brożek, B. Kucharzyk, E. Nęcka, *SNARC Effect and Mathematic Skill Level – Evidence from Professional Mathematicians*, „Psychological Research” 2015, Open Access, http://link.springer.com/article/10.1007/s00426-015-0677-6/fulltext.html.

od zanurzenia kulturowego oraz poziomu kompetencji matematycznych wymaga dalszych badań.

6. Podsumowanie

W niniejszym artykule omówiliśmy trzy obszary badań, które zaliczają się do ucieleśnionego poznania matematycznego: liczenie na palcach, matematyczne metafory pojęciowe oraz efekt SNARC, czyli zależność przestrzenną między liczbą a rodzajem odpowiedzi. Jeśli chodzi o pierwszy obszar, wskazaliśmy, że liczenie na palcach uznać można za ogniwo łączące wrodzony „zmysł numeryczny" i uwarunkowany kulturowo symboliczny system liczbowy, oraz że w korze motorycznej reprezentacje palców oraz małych liczb nakładają się na siebie. Pomimo tego liczenie na palcach różni się jednak wewnątrz- i międzykulturowo. Omawiając drugi obszar akcentowaliśmy, że teoria Lakoffa i Núñeza wychodzi od ucieleśnionych doświadczeń obiektów konkretnych, które – przy wykorzystaniu mechanizmu metaforyzacji – umożliwiają pojmowanie abstrakcyjnych pojęć matematycznych. Wskazaliśmy jednak, że na poziomie eksperckim pojęcia matematyczne mogą stawać się „odcieleśnione". W kwestii związków matematyki z przestrzenią, omówiliśmy wyniki uzyskiwane przez Dehaene'a, które zinterpretować można na korzyść tezy Lakoffa i Núñeza, mówiącej że liczby naturalne pojmowane są metaforycznie jako punkty rozmieszczone na osi liczbowej. Wskazaliśmy jednak, że efekt SNARC zależny jest od zanurzenia kulturowego oraz poziomu kompetencji matematycznych (nasze badanie wykazało, że u profesjonalnych matematyków efekt ten w ogóle nie występuje).

Teza o ucieleśnieniu poznania matematycznego okazuje się owocna, jednak nie powinna być traktowana jako dogmat. W niniejszym artykule wskazaliśmy na kilka kłopotów, z jakimi boryka się to podejście. Bez wątpienia najwięcej kontrowersji wśród omówionych przez nas pól badawczych budzi idea pojęciowych metafor matematycznych. Trudno uznać jednak tę teorię za zdegradowany program badawczy, tym bardziej, że póki co, nie można wskazać innego, konkurencyjnego ujęcia, które w naturalistyczny sposób pozwalałoby badać mechanizmy pojęć matematycznych. Naszym zdaniem teoria metafor powinna stać się podstawą badań eksperymentalnych, a kryjące się w niej uproszczenia oraz błędy powinny zostać zrewidowane.

Bibliografia

Bechtel W., Abrahamsen A., Graham G., *The Life of Cognitive Science*, [w:] *A Companion to Cognitive Science*, red. W. Bechtel, G. Graham, Blackwell, Oxford 1998.

Bender A., Beller S., *Fingers as a tool for counting – naturally fixed or culturally flexible?*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 10–12.

Bremer J., *Wprowadzenie do filozofii umysłu*, WAM, Kraków 2010.

Brożek B., Hohol M., *Umysł matematyczny*, Copernicus Center Press, Kraków 2014.

Butterworth B., *The Mathematical Brain*, Macmillan, London 1999.

Cipora K., Hohol M., Nuerk H.-C., Willmes K., Brożek B., Kucharzyk B., Nęcka E., *SNARC Effect and Mathematic Skill Level – Evidence from Professional Mathematicians*, „Psychological Research" 2015, Open Access, http://link.springer.com/article/10.1007/s00426-015-0677-6/fulltext.html.

Cipora K., Nęcka E., *Kontinua a przestrzeń – przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia*, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 2012, nr 26, s. 7–21.

Cipora K., Nuerk H.-Ch., *Is the SNARC Effect Related to the Level of Mathematics? No Systematic Relationship Observed Despite More Power, More Repetitions, and More Direct Assessment of Arithmetic Skill*, „The Quarterly Journal of Experimental Psychology" 2013, t. 66, nr 10, s. 1974–1991.

Cipora K., Szczygieł M., Hohol M., *Palce, które liczą: znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego*, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 2014, nr 30, s. 59–73.

Cipora K., Szczygieł M., *Wyścig Liczb – The Number Race – polska wersja językowa narzędzia wczesnej interwencji w przypadku ryzyka dyskal-*

kulii rozwojowej oraz wspomagania rozwoju kompetencji arytmetycznych, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 2013, nr 27, s. 71–85.

Darby D., Walsh K., *Neuropsychologia kliniczna Walsha*, tłum. B. Mroziak, GWP, Gdańsk 2008.

Dehaene S., *The Number Sense. How the Mind Created Mathematics,* Revisted and Expanded Edition, Oxford University Press, Oxford – New York 2011.

Dehaene S., Bossini S., Giraux P., *The Mental Representation of Parity and Numerical Magnitude*, „Journal of Experimental Psychology: General" 1993, nr 122, s. 371–396.

Di Luca S., Pesenti M., *Masked Priming Effect with Canonical Finger Numeral Configurations*, „Experimental Brain Research" 2008, t. 185, nr 1, s. 27–39.

Fayol M., Seron X., *About numerical representations: Insights from Neuropsychological, Experimental, and Developmental Studies*, [w:] *Handbook of Mathematical Cognition*, red. J.I. Campbell, Psychology Press, New York 2005.

Fischer M.H., Brugger P., *When Digits Help Digits: Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 41–47.

Fodor J.A., *The Mind Doesn't Work That Way. The Scope and Limits of Computational Psychology*, The MIT Press, Cambridge, MA 2000.

Frąckowiak-Ciesielska A., *Blaski i cienie współczesnych koncepcji nominalistycznych w filozofii matematyki*, [w:] *Światy matematyki – tworzenie czy odkrywanie? Księga Pamiątkowa ofiarowana Profesorowi Romanowi Murawskiemu*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2010.

Gevers W., Reynvoet B., Fias W., *The mental representation of ordinal sequencesis spatially organized*, „Cognition" 2003, nr 87, s. B87–B95.

Gibbs R.W., Jr., *Embodiment and Cognitive Science*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

Hohol M., *Wyjaśnić umysł. Struktura teorii neurokognitywnych*, Copernicus Center Press, Kraków 2013.

Ifrah G., *Historia powszechna cyfr*, Tom 1, tłum. K. Marczewska, W.A.B., Warszawa 2006.

Imbo I., Vandierendonck A., Fias W., *Passive Hand Movements Disrupt Adults' Counting Strategies*, „Frontiers in Psychology" 2011, nr 2, s. 48–52.

Kornblum S., Hasbroucq T., Osman A., *Dimensional overlap: cognitive basis for stimulus-response compatibility – a model and taxonomy*, „Psychological Review" 1990, t. 97, nr 2, s. 253–270.

Krajewski S., *Czy matematyka jest nauką humanistyczną?*, Copernicus Center Press, Kraków 2011.

Lakoff G., Johnson M., *Co kognitywizm wnosi do filozofii*, tłum. A. Pawelec, „Znak" 1999, nr 11, s. 245–263.

Lakoff G., Johnson M., *Metafory w naszym życiu*, tłum. T. Krzeszowski, Aletheia, Warszawa 2010.

Lakoff G., Johnson M., *Philosophy in the Flesh. The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*, Basic Books, New York 1999.

Lakoff G., Núñez R.E., *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being,* Basic Books, New York 2000.

Merleau-Ponty M., *Fenomenologia percepcji*, tłum. M. Kowalska, J. Migasiński, Aletheia, Warszawa 2003.

Moyer R.S., Landauer T.K., *Time Required for Judgments of Numerical Inequality*, „Nature" 1967, nr 215, s. 1519–1520.

Penner-Wilger M., Anderson M.L., *An Alternative View of the Relation between Finger Gnosis and Math Ability: Redeployment of Finger Representations for the Representation of Numer*, [w:] *Proceedings of the 30th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*, Cognitive Science Society, Austin 2008, s. 1647–1652.

Pogonowski J., *Geneza matematyki wedle kognitywistów*, „Investigationes Linguisticae" 2011, t. XXIII, s. 106–114, http://logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Littlejill01.pdf.

Pogonowski J., *Matematyczne fantazje kognitywistów*, 2013, http://logic.amu.edu.pl/images/3/32/Mfk2013.pdf.

Pogonowski J., *Matematyczne metafory kognitywistów*, „LVIII Konferencja Historii Logiki", Kraków 2012, http://www.logic.amu.edu.pl/images/0/0e/Mmk2012.pdf .

Sato M., Cattaneo L., Rizzolatti G., Gallese V., *Numbers Within our Hands: Modulation of Corticospinal Excitability of Hand Muscles During Numerical Judgment*, „Journal of Cognitive Neuroscience" 2007, t. 19, nr 4, s. 684–693.

Szczygieł M., Cipora K., Hohol M., *Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych*, „Psychologia rozwojowa" 2015, t. 20, nr. 3.

Tomasello M., *Kulturowe źródła ludzkiego poznawania*, tłum. J. Rączaszek, PIW, Warszawa 2002.

Trojan M., *Na tropie zwierzęcego umysłu*, Scholar, Warszawa 2013.

Tschentscher N., Hauk O., Fischer M.H., Pulvermüller F., *You Can Count on the Motor Cortex: Finger Counting Habits Modulate Motor Cortex Activation Evoked by Numbers*, „Neuroimage" 2012, t. 59, nr 4, s. 3139–3148.

Wiese H., *Numbers, Language and Human Mind*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.

Wigner E.P., *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki*, red. R. Murawski, PWN, Warszawa 2002.

Wilson M., *Six Views of Embodied Cognition*, „Psychonomic Bulletin & Review" 2002, t. 9, nr 4, s. 625–636.

Wood G., Nuerk H.-C., Willmes K., *Crossed hands and the SNARC effect: a failure to replicate Dehaene, Bossini and Giraux (1993)*, „Cortex" 2006, nr 42, s. 1069–1079.

Wood G., Willmes K., Nuerk H.-C., Fischer M.H., *On the cognitive link between space and number: A meta-analysis of the SNARC effect*, „Psychology Science Quarterly" 2008, t. 50, nr 4, s. 489–525.

Zebian, S., *Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the reverse SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers*, „Journal of Cognition and Culture" 2005, t. 5, s. 165–190.