

MONIKA SZCZYGIEŁ

Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
Institute of Psychology, Jagiellonian University, Kraków

KRZYSZTOF CIPORA

Instytut Psychologii, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych
Institute of Psychology, Jagiellonian University, Kraków
Copernicus Center

MATEUSZ HOHOL

Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie
Faculty of Philosophy, Pontifical University of John Paul II, Kraków
e-mail: szczygiel89@gmail.com

Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych

Finger counting and its role in the development of math competence

Abstract. Finger counting plays an important role in mathematical cognition, especially in the acquisition of the concept of number and elementary math competence. Fingers are spontaneously used to count because of their constant availability and easiness of manipulation. Stable counting order within hand facilitates the acquisition of ordinal as well as cardinal numbers. Additionally, using fingers to count alleviates working memory load and allows constant control of counting accuracy. Apart from the usefulness for counting practice, cognitive representations of fingers are strongly interconnected with representations of numbers. Finger gnosis (the quality of the brain representations of fingers) is a good predictor of current as well as future math achievement. There is also evidence that the training of finger differentiation leads to improvements in math achievement.

Key words: cognitive development, mathematical cognition, finger counting, finger gnosis

Słowa kluczowe: rozwój poznawczy, poznanie matematyczne, liczenie na palcach, gnozja palców

UWAGI WSTĘPNE

Znajomość liczb i działań na nich ma ogromne znaczenie w codziennym życiu, dlatego rozwijanie umiejętności matematycznych dzieci stanowi wyzwanie dla edukacji przedszkolnej i szkolnej (Beller, Bender, 2011). Jednym z aspektów poznania matematycznego, który przez długi czas był zaniedbywany za-

równy przez badaczy, jak i praktyków edukacji, a w ostatnich latach zyskał duże zainteresowanie, jest liczenie na palcach. Do lat 70. XX wieku uważano, że mentalna arytmetyka opiera się na abstrakcyjnych, amodalnych i symbolicznych manipulacjach, poznanie matematyczne zaś jest idealnym przykładem abstrakcyjnego przetwarzania informacji (Groen, Parkman, 1972). W ostatnich latach pojawi-

ło się jednak wiele badań na temat sensorycznego i motorycznego aspektu poznania matematycznego. Wyniki badań prowadzonych w ostatnich dwóch dekadach wskazują na ogromne znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego zarówno u dzieci, jak i u osób dorosłych. Wiele rezultatów, uzyskanych przy wykorzystaniu różnych podejść metodologicznych, takich jak: (1) neuroobrazowanie (np. Kaufmann, Vogel, Wood, Kremser, Schocke, Zimmerhackl, Koten, 2008; Pesenti, Thioux, Seron, De Volder, 2000; Pinel, Piazza, Le Bihan, Dehaene, 2004); (2) przezczaszkowa stymulacja magnetyczna (TMS; Rusconi, Walsh, Butterworth, 2005); (3) neuropsychologia poznawcza (np. Fayol, Barrouillet, Marinthe, 1998; Noël, 2005) wskazują na związek między umysłową reprezentacją palców a reprezentacją liczb. Rozbudowany przegląd badań wraz z propozycją modelu teoretycznego roli ucieleśnienia w poznaniu matematycznym przedstawiają Martin H. Fischer i Peter Brugger (2011) oraz M.H. Fischer (2012).

W literaturze polskojęzycznej informacje na temat liczenia na palcach można odnaleźć w pracach Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej i Ewy Zielińskiej (Gruszczyk-Kolczyńska, 2000; 2012; Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 1999; 2009) oraz Zbigniewa Semadeniego (2012/2013). W niniejszej pracy skupiono się na znaczeniu liczenia na palcach w rozwoju kompetencji matematycznych u dzieci. Jego znaczenie w poznaniu matematycznym u osób dorosłych omówiono w innej pracy (Cipora, Szczygieł, Hohol, 2014).

ZNACZENIE LICZENIA NA PALCACH

Jak podają Rochel Gelman i C. Randy Gallistel (1986), opanowanie umiejętności liczenia opiera się na zrozumieniu pięciu zasad: (1) wzajemna jednoznaczna odpowiedniość (*one to one correspondence*) – każdej liczbie przypisana jest jedna etykieta werbalna; (2) kolejność obiektów nie ma znaczenia; (3) kolejność liczebników jest stała; (4) liczebnik na ostatnim miejscu sekwencji liczenia oznacza licznosc zbioru; (5) wszelkie

obiekty mogą być liczone w ten sam sposób. Posługiwanie się palcami okazuje się bardzo pomocne w zrozumieniu tych zasad, ponieważ w przeciwieństwie do liczebników palce są ciągle widoczne i dostępne, a także bardziej rozróżnialne percepcyjnie niż liczebniki (werbalne etykiety liczb), które muszą być zapamiętane. Dodatkowo palce są zazwyczaj używane w tej samej kolejności, co utrwala wiedzę o kolejności liczb (Wiese, 2003). Odmienne poglądy przedstawia Z. Semadeni (nieopublikowany manuskrypt), który zwraca uwagę na konieczność kształcenia dzieci przez liczenie palców w różnej kolejności. Uważa on, że narzucanie sposobu rachowania na palcach usztywnia myślenie, utrudniając przechodzenie na poziom operacyjny w rozumieniu teorii Jeana Piageta.

Na rolę palców w procesie przechodzenia od reprezentacji konkretnej do abstrakcyjnej (liczenie w pamięci) zwracają uwagę E. Gruszczyk-Kolczyńska i E. Zielińska (1999). Podkreślają, że w celu osiągnięcia dojrzałości matematycznej dziecko musi opanować umiejętność liczenia obiektów, odróżniania prawidłowego liczenia od błędnego oraz dodawania i odejmowania. Czynności te wykonywane są najpierw na konkretach, później na palcach i wreszcie w pamięci. Według autorów największe znaczenie ma proces odrywania od konkretów (źródeł tego założenia można szukać w pracach J. Piageta, 1966), a w toku edukacji nauczyciel powinien pokazać dziecku, że zamiast przedmiotów konkretnych do liczenia można wykorzystać własne palce. Warto jednak zaznaczyć, że inni autorzy (por. Butterworth, 1999) są zdania, że liczenie na palcach jest czynnością spontaniczną i powszechną w większości kultur. Kwestię tę próbowali rozstrzygnąć Virginie Crollen, Rachel Mahe, Olivier Collignon i Xavier Seron (2011). Autorzy sprawdzili, czy liczenie na palcach pojawia się spontanicznie, czy jest kształtowane przez modelowanie. Porównując widzące i niewidzące dzieci, doszli do wniosku, że te niewidzące stosowały strategię liczenia na palcach zdecydowanie rzadziej niż ich widzący rówieśnicy. Mimo to w rozwiązanych zadaniach dzieci w obu grupach

uzyskały podobną poprawność. Dzieci niewidzące miały niższe wyniki tylko wtedy, gdy zadania silnie angażowały zasoby werbalnej pamięci roboczej. Z jednej strony dane te sugerują, że liczenie na palcach nie jest konieczne do rozwoju umiejętności liczenia. Z drugiej strony o tym, że liczenie na palcach ma charakter naturalny i spontaniczny, świadczy opisywany przez Klause Poecka (1965) przypadek dziewczynki urodzonej bez przedramion, która wykorzystywała swoje fantomowe palce do liczenia i rozwiązywania problemów arytmetycznych.

Posługiwanie się palcami jest czymś więcej niż wykorzystywaniem zewnętrznych obiektów (Moeller, Martignon, Wessolowski, Engel, Nuerk, 2011). Dzieci na pewnym etapie rozwoju używają palców do liczenia i obliczania (Butterworth, 1999), nawet jeśli zostało to zabronione. Szkodliwe jest zabranianie używania palców do liczenia tym, które tego potrzebują, ponieważ uniemożliwia to wolniej rozwijającemu się dziecku samodzielne zdobywanie wiedzy (Semadeni, nieopublikowany manuskrypt). Podobne spostrzeżenia można znaleźć w pracach E. Gruszczyk-Kolczyńskiej (2012). Ponadto badaczka ta zaznacza, że nawet jeżeli dziecko opanuje operacje pamięciowe, w niektórych sytuacjach może nadal wspomagać się obiektami zastępczymi (zwłaszcza palcami).

W badaniu podłużnym (pomiar w 11 punktach czasowych od początku przedszkola do końca drugiej klasy) wykazano, że w wieku przedszkolnym dzieci, które posługują się palcami podczas liczenia, radzą sobie lepiej z rozwiązywaniem problemów matematycznych (korelacja .60). Z czasem jej wielkość spada i w drugiej klasie wynosi $-.15$ (Jordan, Kaplan, Ramineni, Locuniak, 2008). Korzyści wynikające z używania palców do liczenia wynikają z tego, że palce (1) umożliwiają tworzenie wzrokowo-przestrzennej reprezentacji liczb (Fayol, Seron, 2005); (2) pozwalają śledzić liczbę słów wypowiedzianych podczas sekwencji liczenia (Fuson, Secada, 1986); (3) pozwalają zrozumieć zasadę wzajemnej jednoznacznej odpowiedniości (Alibali, DiRusso, 1999; por też Piaget, 1977), co pomaga dzieciom

koordynować procesy przypisywania liczebników do każdego palca i oddzielania elementów, które już liczyły, od tych, które pozostały do zliczenia (Gelman, Gallistel, 1986); (4) utrzymują zasadę stałego porządku (wymienianie etykiet liczbowych w tej samej kolejności, w całej sekwencji liczenia), poprzez wspieranie nawyku wiązania palców z obiektami w sekwencyjnym, specyficznym kulturowo porządku (Wiese, 2003; Andres, Di Luca, Pesenti, 2008); (5) w przeciwieństwie do cyfr arabskich lub zbiorów reprezentacje palców pozwalają zrozumieć istotę liczby kardynalnej (ostatni liczebnik wypowiedziany podczas liczenia określa łączną liczbę obiektów w zestawie; Fayol, Seron, 2005); (6) umożliwiają zrozumienie dziesiętnego systemu liczbowego (Andres i wsp., 2008); (7) umożliwiają realizację podstawowych operacji arytmetycznych na liczbach jednocyfrowych (Geary, 1994; Ifrah, 2000); (8) za ich pomocą można liczyć od dowolnej liczby (np. podczas korzystania z kalendarza – określenia, ile dni pozostało do weekendu itp.), co może stanowić podstawę indukcji matematycznej (Andres i wsp., 2008). Warto zwrócić uwagę, że w świetle teorii J. Piageta (1977) na wszystkich etapach kształtowania się pojęcia liczby ogromną rolę odgrywa doświadczenie (zarówno fizyczne, jak i logiczno-matematyczne, czyli takie, które związane jest z samą czynnością manipulacji w oderwaniu od właściwości konkretnych przedmiotów). Palce natomiast stanowią zawsze dostępny zestaw obiektów, na którym łatwo jest manipulować.

Na podstawie omówionych wyżej badań można stwierdzić, że liczenie na palcach pełni ważną funkcję w procesie nabywania kompetencji matematycznych przez dzieci oraz w poznaniu matematycznym u osób dorosłych. Palce odgrywają w poznaniu matematycznym zdecydowanie istotniejszą rolę niż zewnętrzne w stosunku do ciała obiekty (np. patyczki do liczenia). Warto podkreślić, że badania w tym zakresie nie tylko pozwalają lepiej zrozumieć samo poznanie matematyczne, ale także stanowią interesujące źródło informacji na temat tego, w jaki sposób umysł przetwarza materiał abstrakcyjny, do którego nie

jest ewolucyjnie przystosowany. Wiele z wyników omawianych powyżej można interpretować w nurcie ucieleśnionego poznania. Wykorzystanie mózgowych reprezentacji palców i operacji na nich wydaje się jednym ze sposobów, w jaki umysł przystosował się do przetwarzania materiału abstrakcyjnego.

UMYSŁOWA REPREZENTACJA PALCÓW

W ontogenezie palce wykorzystuje się do reprezentowania liczebności, zanim pojawia się reprezentacje symboliczne, takie jak liczebniki lub cyfry arabskie (Fuson, Secada, 1986; Rusconi i wsp., 2005). Inną opinię wyrażają Elena Nicoladis, Simone Pika i Paula Marentette (2010), które przedstawiają wyniki badań sugerujące, że symboliczne systemy liczenia nie są zakorzenione w doświadczeniach cielesnych. Autorki badały dzieci 2- i 3-letnie oraz 4- i 5-letnie, które proszono, aby umieściły w pudełku liczbę zabawek, oznaczoną przez eksperymentatora za pomocą palców lub liczebników. Dzieci młodsze radziły sobie w obu warunkach równie źle, dzieci starsze natomiast radziły sobie lepiej, gdy liczbę zabawek przedstawiono za pomocą liczebników, a nie za pomocą palców. Podobne wyniki uzyskano, kiedy dzieci miały określić liczbę zabawek włożonych do pudełka przez eksperymentatora. Dzieciom łatwiej było posługiwać się liczebnikami niż gestami oznaczającymi konkretne liczby. Na podstawie uzyskanych wyników autorki odrzucają hipotezę Heike Wiese (2003), zgodnie z którą pokazywane na palcach liczby są przystępniejsze dla dzieci w wieku przedszkolnym niż liczebniki. Warto zaznaczyć również, że samo wykorzystanie palców do liczenia nie gwarantuje poprawności wykonania tego zadania. Dzieci mogą liczyć zestawy elementów, ale nie muszą zauważać odpowiedniości między liczbą palców a wypowiedzianymi słowami, co świadczy o niedojrzałej reprezentacji ilości (Brisiaud, 2003).

Pomimo omówionych wyżej uwag krytycznych najczęściej przyjmuje się, że pal-

ce odgrywają funkcjonalną rolę w rozwoju dojrzałego systemu liczenia (np. Gelman, Gallistel, 1986; Butterworth, 2005). Liczenie na palcach i nawyki z nim związane mają też wpływ na umysłowe przetwarzanie liczb i charakter ich reprezentacji nie tylko u dzieci, ale także u osób dorosłych (Domahs, Moeller, Huber, Willmes, Nuerk, 2010). Liczenie na palcach nie jest przejściowym etapem w rozwoju, a nawyki liczenia na palcach mają wpływ na przebieg wykonywanych w pamięci obliczeń arytmetycznych (Dohmas, Krinzinger, Moeller, 2008).

Mentalne reprezentacje liczb mogą przynajmniej chwilowo przejmować cechy zewnętrznych obiektów, takich jak palce, co można uznać za dowód funkcjonalnego związku między reprezentacją palców i liczb. Mentalna reprezentacja liczb może do pewnego stopnia przyjmować formę wywodzącego się z praktyki liczenia na palcach systemu piątkowego. Elise Klein i Ian Thompson (Klein i wsp., 2011) przywołują opisany przez I. Thompsona (1999) przykład chłopca, który miał rozwiązać problem „ $6 + 7 = ?$ ”. Chłopiec ten, przedstawiając sposób rozwiązania, tłumaczył, że wziął 5 z 6 i 5 z 7 i zostało mu 3 (1 z 6 i 2 z 7). Wraz ze wzrostem wielkości liczb, na których wykonywane są operacje, liczenie na palcach staje się coraz mniej efektywne. Reprezentowanie za pomocą palców liczb większych niż 5 angażuje obie ręce. Przykładowo liczbę 7 dzieci reprezentują jako 5 (cała jedna ręka) i 2 palce drugiej ręki. W naszym kręgu kulturowym cała jedna ręka oznacza 5 (gest 5 to dla dzieci najłatwiejszy ze wszystkich gestów liczbowych; Ann, 1993). Efektywność liczenia na palcach jest jeszcze mniejsza podczas operowania na liczbach większych niż 10. W takich wypadkach dzieci często myślą się o 5 (*split 5 errors*; Domahs i wsp., 2008). Ci sami autorzy podają dwie interpretacje tego błędu: w wypadku łatwych problemów pojawiają się błędy w przywoływaniu wyników z pamięci długotrwałej (LTM), w przypadku złożonych problemów natomiast dochodzi do pomyłek w monitorowaniu liczby „pełnych dłoni”. Aby sobie z tym poradzić, dzieci stosują różnorodne stra-

tegie np. dotykanie lub zamykanie jednej dłoni (por. Fuson, Kwon 1992).

LICZENIE NA PALCACH A PAMIĘĆ ROBOCZA

Działanie pamięci roboczej ma bardzo duże znaczenie dla wykonywania obliczeń matematycznych (LeFevre, DeStefano, Coleman, Shanahan, 2005). Muszą w niej być przechowywane liczby, na których wykonywane są działania i przywoływane z pamięci długotrwałej reguły ich wykonania (np. kolejność działań). Zajmują ją także wyniki częściowe przywoływane z pamięci długotrwałej lub będące rezultatem przetwarzania informacji w pamięci roboczej. W wielu sytuacjach ładunek informacji koniecznych do przechowania przekracza pojemność i czas przechowywania w tej strukturze pamięciowej. W sytuacji przeciążenia pamięci roboczej można stosować różne strategie jej odciążania, np. zapisywanie wyników częściowych na papierze czy właśnie liczenie na palcach (Gracia-Bafully, Noël, 2008). Jest ono szczególnie pomocne dla osób dysponujących niewielką pojemnością pamięci roboczej. David C. Geary, Christine C. Bow-Thomas, Fan Liu i Robert S. Siegler (1996) w badaniu międzykulturowym wykazali, że u dzieci posługujących się językiem chińskim (w którym liczebniki są krótsze niż w języku angielskim) zakres pamięci roboczej (*digit span*) jest większy, a dzieci te podczas liczenia mniej wspomagają się palcami.

LICZENIE NA PALCACH W KONTEKŚCIE PSYCHOLOGII KLINICZNEJ DZIECKA

Przez długi czas uważano, że wykorzystanie liczenia na palcach jest przejawem stosowania niedojrzałych strategii, charakterystycznym dla osób mających poważne problemy z operowaniem na materiale liczbowym, w tym osób cierpiących na dyskalkulię (por. Moeller i wsp., 2011). Szczegółową charakterystykę liczenia na palcach u osób cierpiących na dys-

kalkulię przedstawiają Jane Emerson i Patricia Babbie (2010). Osoby z tym zaburzeniem cierpią na deficyty w zakresie elementarnych procesów umysłowego przetwarzania liczb i ilości. Dodatkowo dyskalkulii może towarzyszyć dyspraksja połączona z agnozą palców, co może utrudniać wykorzystanie ich do liczenia. Podczas nabywania elementarnych umiejętności matematycznych dzieci cierpiące na dyskalkulię popełniają liczne błędy w liczeniu na palcach. Trudność sprawia im zachowanie zasady wzajemnej jednoznacznej odpowiedniości – poprawnie przemieszczają palce, ale liczą źle (np. dwa razy ten sam obiekt). Z upływem czasu osoby dotknięte dyskalkulią rozwojową opanowują technikę liczenia na palcach, stosują jednak tę metodę w sposób nieoptymalny. W wypadku dużych liczb odliczają za pomocą palców kolejne jednostki, zamiast najpierw w pamięci obliczyć wynik w zakresie dziesiątek (np. mając obliczyć $35 + 23$, zaczynają odliczać na palcach kolejne jednostki od 35 wwyż). Dzieci cierpiące na dyskalkulię mają problemy z przejściem od liczenia na palcach do bardziej złożonych strategii (porcjowanie, wykrywanie wzorców; Noël, Rousselle, Mussolin, 2005). Warto jednak zaznaczyć, że uporczywe stosowanie liczenia na palcach przez osoby z dyskalkulią nie stanowi nieadaptacyjnego nawyku. Można je uznać za rodzaj strategii ratunkowej (*backup strategy*), która mimo swoich słabości umożliwia względnie poprawne wykonywanie obliczeń. Zabronienie liczenia na palcach osobom z dyskalkulią powoduje, że popełniają one jeszcze więcej błędów (Kaufmann, 2002).

Innym zaburzeniem, w którym pojawiają się deficyty zarówno w zakresie liczenia, jak i gnozji palców, okazuje się zespół Gerstmana. Jest to zespół czterech objawów towarzyszących lezjom w obszarze zakrętu kątownego półkuli dominującej. W jego skład wchodzi: akalkulia, agrafia, agnoza palców i zaburzenia orientacji lewa-prawa strona (Rusconi, Pinel, Dehaene, Kleinschmidt, 2010). Zespół Gerstmana ma swój rozwojowy odpowiednik (Suresh, Sebastian, 2000), jego objawy występują niekiedy u dzie-

ci z problemami w nauce. Często towarzyszą im deficyty mowy, trudności w czytaniu, problemy behawioralne. Jest on klasyfikowany jako specyficzna trudność w uczeniu się. Etiologia rozwojowego zespołu Gerstmana nie wiąże się z lezjami, a dysfunkcje występują nie tylko w półkuli dominującej. Istnienie współwystępujących objawów agnozji palców i problemów z liczeniem jest interpretowane jako dowód funkcjonalnych zależności między nimi.

GNOZJA PALCÓW I WCZESNE KOMPETENCJE MATEMATYCZNE

Sprawność posługiwania się palcami, nazywania ich oraz zdolność określania, który palec jest w danym momencie stymulowany, bywa określana gnozą palców (*finger gnosis*). Marcie Penner-Wilger i Michael L.A. Andreson (2008) interpretują ją jako przejaw sprawnie działającej mózgowej reprezentacji palców. Sprawność gnozi palców koreluje z poziomem osiągnięć matematycznych. Jej związki z poziomem wczesnych umiejętności matematycznych nie ograniczają się do niskiego poziomu tych zmiennych. Dzieci osiągające ponadprzeciętne wyniki w zakresie gnozi palców mają również wysokie umiejętności matematyczne (Reeve, Humberstone, 2011).

G. Willems, M.C. Feeters-Erenay, R. Deputdt-Bctre (1980; za: Noël, 2005) pokazali, że zadania na rozpoznawanie i różnicowanie palców wykonywane przez dzieci w wieku od 5;6 do 6;6 lat były jednym z istotnych predyktorów osiągnięć z matematyki 3 lata później. Do podobnych wniosków prowadzą wyniki późniejszych badań. Michel Fayol, Pierre Barrouillet i Catherine Marinthe (1998) podjęły próbę określenia, czy wyniki testów neuropsychologicznych przeprowadzonych w wieku 5 lat pozwalają przewidzieć późniejsze osiągnięcia szkolne z matematyki. Jednym z istotnych predyktorów okazały się zadania obejmujące gnozę palców. Polegały one na tym, że dzieci miały: (1) identyfikować palce dotykane przez eksperymentatora, kierując się wyłącznie wskazówkami dotykowymi (dłonie dziec-

ka były poza zasięgiem jego wzroku); (2) różnicować palce – określać, czy eksperymentator w danej próbie dotknął dwa razy tego samego palca, czy dwóch różnych palców; a także zadania obejmujące gnozę ciała – (3) wskazać, które części ciała zostały dotknięte przez eksperymentatora. Gnozia palców pozwalała przewidywać osiągnięcia matematyczne dziecka rok po badaniu neuropsychologicznym i, jak pokazało następne badanie (Marinthe, Fayol i Barrouillet, 2001), również 3 lata później. Moc predykcyjna wymienionych wyżej testów była specyficzna dla osiągnięć matematycznych, testy te nie pozwalały bowiem przewidywać osiągnięć w zakresie czytania i pisanie. Niemniej korelacja między wynikami testów mierzących gnozę palców a poziomem osiągnięć matematycznych ($r = .46$) nie jest istotnie wyższa od korelacji między ogólnymi miarami rozwoju a poziomem osiągnięć matematycznych ($r = .44$; por. Noël, 2005).

Opisane wyżej wyniki udało się zreplicować Marie-Pascal Noël (2005) w badaniu z udziałem dzieci w wieku 6 lat. Gnozia palców była dobrym predyktorem osiągnięć matematycznych rok później. Badanie pokazało swego rodzaju uprzywilejowaną rolę gnozi palców w stosunku do gnozi całego ciała. Wyniki w zakresie symultagnozi (eksperymentator dotykał jednocześnie dwóch części ciała dziecka, np. lewego ucha i prawego nadgarstka, a dziecko miało powiedzieć, które części zostały dotknięte) i grafestezji (eksperymentator kreślił na dłoni dziecka kształt, np. „+”, a dziecko miało wskazać, jaki to był kształt) nie wyjaśniają dużo większego odsetka wariacji w zakresie osiągnięć matematycznych w stosunku do zadań na identyfikację i różnicowanie palców (Noël, 2005). W tym samym badaniu pokazano również, że gnozia palców ma lepszą moc predykcyjną dla późniejszych osiągnięć matematycznych niż ogólne wskaźniki rozwoju, takie jak szybkość przetwarzania informacji czy preferencja ręki. Dodatkowo wyniki badania M.-P. Noël (2005) pokazują, że lepszą moc predykcyjną dla przyszłych osiągnięć matematycznych niż gnozia ciała ma zestaw zadań obejmujących gnozę palców, orientację lewa/prawa strona, sprawność

pisania i sprawności konstrukcyjne (zdolności, które zostają zaburzone w zespole Gerstmanna).

Omówione wyżej badania mają charakter korelacyjny i nie pozwalają formułować wniosków na temat zależności przyczynowych między gnoźją palców a poziomem osiągnięć matematycznych. Na sformułowanie takich wniosków pozwalają natomiast wyniki badań, w których zaobserwowano, że trening gnoźji palców powoduje poprawę umiejętności matematycznych.

Maria Gracia Gracia-Bafalluy i Marie-Pascale Noël (2008) przebadaly 3 grupy dzieci: (1) grupę o niskich wynikach w zakresie gnoźji palców, która została poddana treningowi rozróżniania palców na podstawie informacji dotykowych (2 półgodzinne sesje w tygodniu przez 8 tygodni); (2) grupę kontrolną, która była trenowana w rozumieniu historyjek; (3) grupę, która osiągnęła wysokie wyniki w zakresie gnoźji palców uczęszczając na normalne zajęcia lekcyjne. Trening gnoźji palców okazał się skuteczny. Dzieci z grupy 1 uzyskały istotnie wyższe wyniki po treningu niż dzieci z grupy kontrolnej w zakresie gnoźji palców i umiejętności reprezentowania liczb za pomocą układów palców. Co więcej, dzieci te uzyskały istotnie wyższe wyniki w zakresie sprawności subityzowania (szybkiego i bezwysiłkowego określania liczebności zbiorów do 4 elementów; por. Cipora, Szczygieł, 2013) oraz wskazywania, która z dwóch prezentowanych jednocześnie liczb pojawia się wcześniej podczas liczenia. Wyniki te dowodzą istnienia funkcjonalnej zależności między gnoźją palców a poznaniem matematycznym. Te same autorki przytaczają wyniki innych badań, w których wykazano, że dzieci sprawnie posługujące się palcami (np. z racji gry na pianinie czy gitarze) lepiej radzą sobie w zadaniach mierzących gnoźję palców, a także lepiej wykonują zadania matematyczne. Jak jednak zaznaczają badaczki, trening w zakresie gnoźji palców musi być bardzo intensywny, aby przelożył się na umiejętności matematyczne.

Konieczne są dalsze badania nad skutecznością treningu gnoźji palców jako metody wspomagania wczesnych kompetencji

matematycznych. Jean-Paul Fischer (2010) jest zdania, że zaobserwowane w badaniu M. Gracia-Bafalluy i M.-P. Noël (2008) efekty mogą wynikać z regresji do średniej. Poprawę w zakresie subityzowania zauważono zarówno w grupie z interwencją, jak i w grupie kontrolnej (nie stwierdzono takiej w grupie o początkowo wysokich wynikach w zakresie gnoźji palców). W ostatniej grupie zaobserwowano również spadek w zakresie gnoźji palców między pretestem a posttestem. Powyższe wyniki nie pozwalają jednoznacznie określić, w jaki sposób gnoźja palców wpływa na osiągnięcia matematyczne, niemniej stanowią ciekawy obszar dla dalszych badań.

PODSUMOWANIE

Liczenie na palcach przez długi czas było uważane jedynie za przejściowy etap w rozwoju kompetencji matematycznych u dzieci, w ostatnim czasie jednak widoczne jest wśród badaczy ogromne zainteresowanie zarówno rolą liczenia na palcach w poznaniu matematycznym, jak i możliwościami wykorzystania tej wiedzy w edukacji. Pomimo że liczenie na palcach nie jest konieczne do rozwoju kompetencji matematycznych, z pewnością pełni ważną funkcję w rozwoju dojrzałego systemu liczenia i stanowi użyteczne narzędzie (ze względu na bezpośrednią dostępność), pozwalające odciążać pamięć roboczą, która jest zaangażowana w rozwiązywanie problemów arytmetycznych (Crollen i wsp., 2011).

Pomimo wielu danych sugerujących, że liczenie na palcach odgrywa ogromną rolę w rozwoju dojrzałego systemu liczenia, to wyniki kilku badań (np. Crollen i wsp., 2011; Nicoladis i wsp., 2010) wydają się kwestionować takie wnioski: (1) użycie palców nie poprzedza zastosowania języka; (2) dzieci, które nie korzystają z palców w czasie liczenia, nie wykazują opóźnionego lub nietypowego rozwoju numerycznego. (3) sposób liczenia na palcach jest ściśle związany z uwarunkowaniami kulturowymi (Bender, Beller, 2011; Butterworth, Reeve, Reynolds, 2011). Nauczanie uwzględniające użycie palców do liczenia może być

szczególnie przydatne w przedszkolu lub wśród osób, które nie mają możliwości nauczyć się tego przez modelowanie, np. wśród osób niewidzących (Crollen i wsp., 2011).

K. Moeller i wsp. (2011) zachęcają również do ostrożności w zakresie opisywania relacji przyczynowych między poznaniem matematycznym a liczeniem na palcach. Autorzy pokazują odmienne spojrzenie psychologów i dydaktyków matematyki na tę kwestię. Pierwsi na podstawie obserwowanych związków między gnoźją palców a poznaniem matematycznym uznają liczenie na palcach za kluczowe dla rozwoju kompetencji matematycznych. Z kolei dydaktycy matematyki na podstawie obserwacji, iż wśród dzieci starszych liczenie na palcach występuje głównie u osób mających problemy z matematyką, dochodzą do wniosku, że powinno ono zostać zastąpione bardziej dojrzałymi strategiami.

Należy jednak stanowczo podkreślić, że oba te wnioskowania oparte są na obserwowanych korelacjach. Niemożliwe wydaje się zatem jednoznaczne wnioskowanie o przyczynowości. Bezpośredni dowód na to, że gnoźja palców jest jednym z elementów leżących u podstawy zdolności rachunkowych, stanowią wyniki badań nad skutecznością treningu gnoźji palców. Niemniej są one nieliczne i jak

opisano wyżej, kwestionowano zasadność ich konkluzji. Podobnie nie ma jednoznacznego rozstrzygnięcia, czy starsze dzieci mają problemy z matematyką, gdyż posługują się liczeniem na palcach, czy też posługują się liczeniem na palcach, ponieważ mają problemy z liczeniem w pamięci. Teoretycznie możliwy jest również bardziej złożony układ współzależności: (1) zależności przyczynowe zachodzą w obu kierunkach; (2) obie zmienne przyczynowo wynikają z innej zmiennej nieuwzględnionej w analizach; (3) jedna ze zmiennych wpływa na inną zmienną niewziętą pod uwagę w analizie, a ta oddziałuje na drugą zmienną. Wyniki dotychczasowych badań, choć nieliczne, wskazują, że liczenie na palcach nie przynosi negatywnych skutków dla kompetencji matematycznych. Takie twierdzenia są również zgodne z większością podejść teoretycznych (por. Gruszczyk-Kolczyńska, 2012). Formułując wnioski na temat relacji przyczynowych między liczeniem na palcach a poznaniem matematycznym, należy zachować pewną dozę ostrożności i jednocześnie uwzględniać w analizie perspektywę rozwojową i różnice indywidualne. Konieczne jest także przeprowadzenie wielu badań potencjalnej skuteczności różnych form treningu gnoźji palców dla rozwoju kompetencji matematycznych.

BIBLIOGRAFIA

- Andres M., Di Luca S., Pesenti M. (2008), Finger counting: The missing tool? *Behavioral and Brain Sciences*, 31, 6, 642–643.
- Ann J. (1993), *A linguistic investigation of the relationship between physiology and handshape*. Doctoral dissertation, University of Arizona.
- Alibali M. W., DiRusso A.A. (1999), The function of gesture in learning to count: More than keeping track. *Cognitive Development*, 14, 1, 37–56.
- Beller S., Bender A. (2011), Explicating numerical information: When and how fingers support (or hinder) number comprehension and handling. *Frontiers in Psychology*, 2, 7–9.
- Bender A., Beller S. (2011). Fingers as a tool for counting-naturally fixed or culturally flexible? *Frontiers in Psychology*, 2, 10–12.
- Brissiaud R. (2003), *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris: Retz.
- Butterworth B. (1999), *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.
- Butterworth B. (2005), The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46, 1, 3–18.
- Butterworth B., Reeve R., Reynolds F. (2011), Using mental representations of space when words are unavailable: Studies of enumeration and arithmetic in indigenous Australia. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42, 4, 630–638.

- Cipora K., Szczygieł M. (2013), Wyścig Liczb – The Number Race – polska wersja językowa narzędzia wczesnej interwencji w przypadku ryzyka dyskalkulii rozwojowej oraz wspomagania rozwoju kompetencji arytmetycznych. *Psychologia – Etologia – Genetyka* 27, 71–85.
- Cipora K., Szczygieł M., Hohol M. (2014), Palce, które liczą: znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego. *Psychologia – Etologia – Genetyka*, 30, 59–73.
- Crollen V., Mahe R., Collignon O., Seron X. (2011), The role of vision in the development of finger–number interactions: Finger-counting and finger-montring in blind children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 109, 4, 525–539.
- Domahs F., Krinzinger H., Willmes K. (2008), Mind the gap between both hands: Evidence for internal finger-based number representations in children’s mental calculation. *Cortex*, 44, 4, 359–367.
- Domahs F., Moeller K., Huber S., Willmes K., Nuerk H.C. (2010), Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition*, 116, 2, 251–266.
- Emerson J., Babbie P. (2010), *The dyscalculia assessment*. London: Continuum.
- Fayol M., Barrouillet P., Marinthe C. (1998), Predicting arithmetical achievement from neuro-psychological performance: A longitudinal study. *Cognition*, 68, 2, B63–B70.
- Fayol M., Seron X. (2005), About numerical representations: Insights from neuropsychological, experimental, and developmental studies [w:] J.I. Campbell (red.), *Handbook of Mathematical Cognition*, 3–22. New York: Psychology Press.
- Fischer J.P. (2010), Numerical performance increased by finger training: A fallacy due to regression toward the mean? *Cortex*, 46, 2, 272–273.
- Fischer M.H. (2012), A hierarchical view of grounded, embodied and situated numerical cognition. *Cognitive Processing*, 13, 161–164.
- Fischer M. H., Brugger P. (2011), When digits help digits: Spatial–numerical associations point to finger counting as prime example of embodied cognition. *Frontiers in Psychology*, 2, 41–47.
- Fuson K.C., Kwon Y. (1992), Korean children’s understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, 63, 2, 491–506.
- Fuson K.C., Secada W.G. (1986), Teaching children to add by counting-on with one-handed finger patterns. *Cognition and Instruction*, 3, 3, 229–260.
- Geary D.G. (1994), *Children’s mathematical development, research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Geary D.C., Bow-Thomas C.C., Liu F., Siegler R.S. (1996), Development of arithmetical competencies in Chinese and American children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, 67, 5, 2022–2044.
- Gelman R., Gallistel C. (1986), *The child’s understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gracia-Bafalluy M., Noël M.P. (2008), Does finger training increase young children’s numerical performance? *Cortex*, 44, 4, 368–375.
- Groen G.J., Parkman J.M. (1972), A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 79, 329–343.
- Gruszczyk-Kolczyńska E. (2000), *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*. Warszawa: WSiP.
- Gruszczyk-Kolczyńska E. (2012), Dodawanie i odejmowanie w możliwie szerokim zakresie: od poziomu konkretnych, przez zbiory zstępne aż do rachowania w pamięci. Stosowanie tych umiejętności w rozwiązywaniu zadań [w:] E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.), *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli*, 167–186. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (1999), *Dziecięca matematyka: program dla przedszkoli, klas zerowych i placówek integracyjnych*, Warszawa: WSiP.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2009), Kształtowanie umiejętności dodawania i odejmowania od poziomu manipulacji przedmiotami, przez liczenie na zbiorach zastępczych do rachowania w pamięci [w:] E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna*

- dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji, 135–165. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska 2009
- Ifrah G. (2000), *The universal history of computing: From the abacus to quantum computing*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Jordan N.C., Kaplan D., Ramineni C., Locuniak M.N. (2008), Development of number combination skill in the early school years: When do fingers help? *Developmental Science*, 11, 5, 662–668.
- Kaufmann L. (2002), More evidence for the role of the central executive in retrieving arithmetic facts: A case study of severe developmental dyscalculia. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, 24, 3, 302–310.
- Kaufmann L., Vogel S.E., Wood G., Kremser Ch., Schocke M., Zimmerhackl L.B., Koten J.W. (2008), A developmental fMRI study of non-symbolic numerical and spatial processing. *Cortex*, 44, 376–385.
- Klein E., Moeller K., Willmes K., Nuerk H. C., Domahs F. (2011), The influence of implicit hand-based representations on mental arithmetic. *Frontiers in Psychology*, 2, 1–7.
- LeFevre J., DeStefano D., Coleman B., Shanahan T. (2005), Mathematical cognition and working memory [w:] J.I. Campbell (ed.), *Handbook of Mathematical Cognition*, 361–377. New York: Psychology Press.
- Marinthe C., Fayol M., Barrouillet P. (2000). Gnosies digitales et développement des performances arithmétiques [w:] A. Van Hout, C. Meljac (red.), *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, s. 239–254. Paris: Masson.
- Moeller K., Martignon L., Wessolowski S., Engel J., Nuerk H.C. (2011), Effects of finger counting on numerical development – the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, 2, 75–79.
- Noël M.P. (2005), Finger gnosia: A predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology*, 11, 5, 413–430.
- Noël M.P., Rousselle L., Mussolin C. (2005), Magnitude representation in children. Its development and dysfunction [w:] J.I. Campbell (red.), *Handbook of Mathematical Cognition*, 179–195. New York: Psychology Press.
- Nicoladis E., Pika S., Marentette P. (2010), Are number gestures easier than number words for preschoolers? *Cognitive Development*, 25, 3, 247–261.
- Penner-Wilger M., Anderson M.L. (2008, lipiec), An alternative view of the relation between finger gnosia and math ability: Redeployment of finger representations for the representation of number. *Proceedings of the 30th annual meeting of the Cognitive Science Society, Austin, TX*, 1647–1652.
- Pesenti M., Thioux M., Seron X., De Volder A. (2000), Neuroanatomical substrates of Arabic number processing, numerical comparison, and simple addition: A PET study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12, 461–479.
- Piaget J. (1966), *Studia z psychologii dziecka*. Warszawa: PWN.
- Piaget J. (1977), *Psychologia i epistemologia*. Warszawa: PWN.
- Pinel P., Piazza M., Le Bihan D., Dehaene S. (2004), Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron* 41, 6, 983–993.
- Poeck K. (1965), Phantoms following amputation in early childhood and in congenital absence of limbs. *Cortex*, 1, 269–275.
- Reeve R., Humberstone J. (2011), Five-to 7-year-olds' finger gnosia and calculation abilities. *Frontiers in Psychology*, 2.
- Rusconi E., Pinel P., Dehaene S., Kleinschmidt A. (2010), The enigma of Gerstmann's syndrome revisited: A telling tale of the vicissitudes of neuropsychology. *Brain*, 133, 2, 320–332.
- Rusconi E., Walsh V., Butterworth B. (2005), Dexterity with numbers: rTMS over left angular gyrus disrupts finger gnosia and number processing. *Neuropsychologia*, 43, 11, 1609–1624.
- Semadeni Z. (2012/2013), *Matematyka w edukacji początkowej jako fundament całej matematyki szkolnej. Nauczanie Początkowe*, 1, 7–43.
- Semadeni Z. (nieopublikowany manuskrypt), *Matematyka w edukacji początkowej – podejście konstruktywistyczne*.

- Thompson I. (1999), Mental calculation strategies for addition and subtraction. *Mathematics in School*, 28, 1–4.
- Suresh P.A., Sebastian S. (2000), Developmental Gerstmann's syndrome: A distinct clinical entity of learning disabilities. *Pediatric Neurology*, 22, 4, 267–278.
- Wiese H. (2003), *Numbers, language and human mind*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Willems G., Feeters-Erenay M.C., Depuydt-Berte R. (1980), L'intérêt de la discrimination digitale dans les troubles d'apprentissage. *La psychomotricité*, 4, 135–140.

