Hohol, M. (2017). Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego. W: R. Murawski, J. Woleński (red.), Problemy filozofii matematyki i informatyki (ss. 129-143), Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Adama Mickiewicza (DRAFT)

Mateusz Hohol

Zakład Logiki i Kognitywistyki, Instytut Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa

Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Kraków

Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego[1]

W psychologii eksperymentalnej istnieje bogata tradycja badań nad poznaniem matematycznym (Moyer i Landauer 1967; Piaget 1942; Piaget i in. 1981), która doprowadziła do powstania interdyscyplinarnego – obejmującego prócz psychologii także lingwistkę, neuronaukę, antropologię i etologię – nurtu określanego jako kognitywistyka matematyki. Prowadzone w jej ramach badania dotyczą m.in. rozwoju zdolności matematycznych w sensie filogenetycznym (Biro i Matzusawa 2001) i ontogenetycznym (Göbel i in. 2014), mechanizmów poznawczych wyspecjalizowanych w przetwarzaniu struktur matematycznych (Dehaene i in. 2003), zaangażowaniu w poznanie matematyczne ogólnych procesów poznawczych, takich jak kontrola poznawcza, uwaga czy percepcja (Hohol i in. 2017), różnic indywidualnych w działaniu tych mechanizmów (Bugden i Ansari 2011), a także wiedzy eksperckiej (Amalric i Dehaene 2016; Cipora i in. 2016) i operowania formalizmami (Landy i in. 2014).

Dotychczasowe monografie z zakresu kognitywistyki matematyki (Adams i in. 2017; Berch i in. 2015; Brożek i Hohol 2017; Butterworth 1999; Campbell 2005; Cohen Kadosh i Dowker 2015; Dehaene 2011; Dehaene i Brannon 2011; Dębiec 2002; Henik 2016; Lakoff i Núñez 2000; Saxe 2014) koncentrują się głownie na przetwarzaniu liczb oraz struktur numerycznych, zaniedbując całkowicie (lub niemal całkowicie) geometrię. Taki stan rzeczy wydaje się niesatysfakcjonujący co najmniej z trzech powodów: po pierwsze, geometria odgrywa bardzo ważną rolę we współczesnej matematyce oraz w naukach przyrodniczych; po drugie, historycy matematyki wskazują na szczególną rolę geometrii w rozwoju matematyki (Netz 2003). Wreszcie po trzecie, geometria była w zasadzie „od zawsze” przedmiotem zainteresowania epistemologii, której tradycyjne problemy często podejmowane są dziś przez kognitywistów.

---

[1] Niniejszy tekst powstał w ramach realizowanego przez autora grantu „Mechanizmy poznania geometrycznego” przyznanego przez Narodowe Centrum Nauki (program OPUS, 2015/19/B/HS1/03310). Tekst nie powstałby, gdyby nie cenne uwagi, jakie autor otrzymał od prof. Bartosza Brożka (UJ), dr. Krzysztofa Cipory (Uniwersytet w Tybindze) oraz prof. Marcina Miłkowskiego (IFiS PAN) oraz uczestników V Konferencji Filozofii Matematyki i Informatyki (UAM, Poznań, 9–10.12.2016).

Tak więc obraz poznania matematycznego, wyłaniający się ze wskazanych wyżej monografii z zakresu kognitywistyki wydaje się być mocno niekompletny. Innymi słowy, trudno mówić o kognitywistyce matematyki, która zaniedbuje poznanie geometryczne. Chociaż dotychczas nie została przedstawiona żadna kognitywistyczna teoria geometrii, pretendująca do miana kompletnej, szereg wyników badań przeprowadzonych w ramach nauk o poznaniu rzuca światło na podstawy poznania geometrycznego. Celem niniejszego rozdziału jest próba zarysowania komponentów takiej teorii (ograniczając się do geometrii Euklidesa) oraz przedstawienia stanu związanych z nimi dyskusji, ze szczególnym uwzględnieniem problemu przetwarzania pojęć geometrycznych.

Elementarne kompetencje geometryczne

Jednym ze źródeł wiedzy, w którym upatruje się biopsychologicznych podstaw poznania geometrycznego są badania nad orientacją przestrzenną (Gallistel 1990). Cheng (1986) przeprowadził eksperyment, w którym zadaniem szczurów była reorientacja w prostokątnym, ograniczonym ścianami, wybiegu. Szczury początkowo uczyły się w którym rogu wybiegu znajdowała się nagroda (pożywienie). Następnie były dezorientowane, a naukowców interesowało miejsce ponownych poszukiwań nagrody. W pierwszym warunku w aparaturze eksperymentalnej nie umieszczono żadnych wskazówek (całe środowisko było jednorodne pod względem koloru ścian i podłogi czy naświetlenia), stąd jedyną informacją, którą mogły wykorzystać gryzonie była geometria otoczenia.

Okazało się, że szczury nie rozpoczynały poszukiwań chaotycznie w dowolnych rogach, ale kierowały się ku poprawnej lokalizacji lub identycznej z nią geometrycznie lokalizacji przeciwległej (popełniały tzw. błąd rotacyjny). W drugim warunku szczury mogły skorzystać zarówno z informacji geometrycznej, jak i lokalnych informacji w postaci kolorowych ścian czy charakterystycznych oznaczeń poszczególnych rogów. Okazało się, że niezależnie od tego czy lokalne wskazówki odnosiły się do poprawnej lokalizacji czy też pełniły funkcję dystraktorów, gryzonie wybierały albo poprawną lokalizację albo popełniały błąd rotacyjny, co wskazuje, że również wtedy podstawą ich orientacji była geometria środowiska.

Analogiczna procedura eksperymentalna wykorzystana została także w studiach z udziałem innych gatunków zwierząt: ptaków, naczelnych różnych od człowieka oraz ludzi (por. przegląd literatury Thinus-Blanc i in. 2014). Jeśli chodzi o ludzi, Hermer i Spelke (1994; 1996) chciały sprawdzić czy osoby badane popełniają systematycznie błąd rotacyjny czy też w sytuacji konfliktu wskazówek geometrycznych i lokalnych potrafią wykorzystywać informacje w sposób bardziej elastyczny niż szczury. W tym celu przebadały one 22 miesięczne niemowlęta oraz ludzi dorosłych. Badaczki zaobserwowały zróżnicowane wzorce zachowań w zależności od wieku. O ile zdezorientowane dzieci, podobnie jak gryzonie zdolne były do reorientacji w prostokątnym pokoju jedynie na podstawie geometrii, osoby dorosłe systematycznie łączyły informację geometryczną oraz wskazówki lokalne unikając błędów rotacyjnych (wybierały poprawną lokalizację nagrody).

Orientacja przestrzenna ze względu na geometrię środowiska nie jest jedynym przejawem elementarnego poznania geometrycznego. W psychologii eksperymentalnej od lat siedemdziesiątych prowadzi się badania nad przekształceniami figur w wyobraźni. Uczestnikami eksperymentów były zarówno osoby dorosłe (Cooper i Shepard 1973), dzieci (Kail i in. 1980), a także naczelne różne od człowieka (Vauclair i in. 1993). W typowych eksperymentach behawioralnych, prowadzonych w paradygmacie rotacji mentalnych, osobom badanym prezentuje się najpierw bodziec docelowy, np. literę F, a następnie serię bodźców przedstawiających albo obróconą pod pewnym kątem literę F albo lustrzane odbicie litery docelowej, czyli □. Za każdym razem uczestnik eksperymentu odpowiadać musi czy postrzegany aktualnie bodziec jest tożsamy z bodźcem docelowym (obróconym pod pewnym kątem) czy też jest jego lustrzanym odbiciem. W typowym przypadku czasy reakcji dla bodźców obróconych rosną wraz kątem obrotu, z tym, że osoby badane rotują krótszą drogą (np. czas reakcji dla bodźca zrotowanego o 90 stopni jest podobny do czasu reakcji dla bodźca zrotowanego o 270 stopni). Wyniki te sugerują, że aby udzielić odpowiedzi uczestnicy dokonują przekształceń obiektów geometrycznych w wyobraźni.

Biopsychologiczne podstawy poznania geometrycznego

Pretendujące do kompletności wyjaśnienie powyższych efektów wymaga udzielenia odpowiedzi na cztery Tinbergenowskie (1963) pytania: (1) „jak to działa?" (pytanie o mechanizmy przyczynowe), (2) „jak się rozwija?" (pytanie o ontogenezę), (3) „jak wpływa na dostosowanie" (pytanie o wartość adaptacyjną), (4) „jak wyewoluowało?" (pytanie o filogenezę). Pytania (1) i (2) dotyczą czynników proksymalnych, zaś (3) i (4) czynników ultymatywnych; pytania (1) i (3) dotyczą wymiaru synchronicznego, zaś (2) i (4) diachronicznego.

Od lat osiemdziesiątych w kognitywistyce obserwuje się próby identyfikowania wyspecjalizowanych ze względu na dziedzinę, wrodzonych, zamkniętych obliczeniowo i zlokalizowanych w strukturach mózgowych modułów poznawczych (Fodor, 1983). Nawiązując do tej idei Cheng (1986) oraz Gallistel (1990) zaproponowali ideę, zgodnie z którą za reorientację przestrzenną odpowiada wyspecjalizowany w tym zadaniu „moduł geometryczny". Moduł ten wyposażony miał być w kodującą kształt otoczenia „ramę metryczną", na którą w realnym środowisku „nanoszone" są wskazówki przestrzenne, dotyczące np. punktów orientacyjnych (and. *landmarks*). Zdaniem Chenga (1986) „rama metryczna" koresponduje z pojęciem „mapy poznawczej", wprowadzonym do psychologii przez Tolmana (1948) – mapy te są niejęzykowymi, przypominającymi kartograficzne odwzorowania terenu reprezentacjami umysłowymi środowiska.

Sam postulat istnienia modułu nie prowadzi jeszcze do wyjaśnienia obserwowalnych efektów behawioralnych. Trzeba jeszcze opisać jego mechanizm, czyli złożony z wielu komponentów układ, który charakteryzuje się określonym wzorcem działania (Miłkowski 2014). Pierwsze komponenty mechanizmu orientacyjnego odkrywać zaczęto w latach siedemdziesiątych. Wówczas to O'Keffe i wsp. (1971; 1978) zaobserwowali w hipokampie tzw. komórki miejsca, których aktywacje odzwierciedlały aktualne lokalizacje, w których znajdował się szczur, w tym sensie, że na podstawie aktywności tych komórek wnioskować można było o pozycji gryzonia na wybiegu. Odkrycie to uzupełnione zostało przez Edvarda i May-Britt Moserów, którzy w korze śródwęchowej zlokalizowali kolejne elementy mózgowego systemu kartograficznego: komórki siatki, komórki kierunku ruchu, komórki prędkości oraz komórki graniczne (por. Moser i in. 2014 dla przeglądu badań oraz Bechtel 2016 dla opisu mechanizmów).

W cytowanych wyżej pracach nad orientacją przestrzenną dzieci i dorosłych Hermer i Spelke (1994, 1996) również korzystały z pojęcia „modułu". Później zostało ono jednak zastąpione nieco słabszym pojęciem „rdzennego systemu poznawczego" (ang. *core cognitive system*) (Spelke i in. 2010; Kinzler i Spelke 2007). Choć podobnie jak moduły, systemy rdzenne przejawią działanie we wczesnych fazach ontogenezy i mają długą historię filogenetyczną, nie są informacyjnie zamknięte, jak twierdził Fodor (1983), ale mogą być penetrowane przez inne systemy, np. językowe, na skutek czego w trakcie zmian rozwojowych nadbudowywane mogą być na nich nowe trwałe struktury wiedzy.

Zdaniem Spelke i wsp. (2010) poznanie geometryczne „opiera się na co najmniej dwóch starych ewolucyjnie, wczesnych rozwojowo i uniwersalnych kulturowo systemach poznawczych, które wychwytują informacje o kształcie otaczającego nas świata" (s. 865). Pierwszy z tych rdzennych systemów przetwarza reprezentacje trójwymiarowych układów przestrzennych, wykorzystywany jest w pierwszej kolejności do orientacji w środowisku, zaś jego mózgowymi podstawami są hipokamp i kora śródwęchowa. System drugi przetwarza dwuwymiarowe obrazy oraz ruchome wzorce wizualne, jego pierwotna funkcja wiąże się z kategoryzacją obiektów, a mózgową lokalizacją są boczne struktury płata potylicznego. Systemowi temu zawdzięczamy prawdopodobnie m.in. omówioną wyżej zdolność do rotacji obiektów w wyboraźni. Każdy z tych systemów charakteryzuje się ograniczeniami w wychwytywaniu informacji geometrycznych: pierwszy czuły jest na długość oraz kierunek, ale nie na kąty, drugi zaś czuły jest na długość i kąty, ale zaniedbuje odległość (Spelke i wsp., 2010).

O ile wartość adaptacyjna obydwu systemów nie jest raczej dyskusyjna, zastanowić należy się dlaczego gryzonie w orientacji przestrzennej polegają przede wszystkim na systemie pierwszym, co naraża je na błędy rotacyjne. Rozwiązanie sugerują wyniki badań nad orientacją robotów (Gee i in. 2008). Wskazują one, że radzenie sobie w środowisku naturalnym na podstawie punktów orientacyjnych (ang. *landmarks*) okazuje się być nieekonomiczne obliczeniowo. Ponadto punkty orientacyjne również mogą być zawodne – np. charakterystyczne drzewo, które wskazuje na drogę do gniazda (domu) może zostać powalone przez piorun, albo pomylone z innym podobnym obiektem. Orientacja ze względu na geometrię środowiska okazuje się być pod tym względem mniej zawodna (jego kształt podlega mniejszym zmianom) i bardziej ekonomiczna obliczeniowo.

Przejdźmy teraz do ludzi. Unikanie błędów rotacyjnych możliwe jest wraz z przezwyciężaniem przez dzieci omówionych wyżej ograniczeń obydwu rdzennych systemów poznawczych. Zdaniem Spelke i wsp. (2010) dzieci dokonują tego przyswajając język (w szczególności zwroty odnoszące się do relacji przestrzennych; zob. Amalric i in. 2017) oraz wykorzystując wynalazki kulturowe, takie jak obrazy i mapy. Wówczas, na drodze produktywnego łączenia wiedzy rdzennej, generowany jest nowy system reprezentacji geometrycznych, czuły zarówno na długość, kierunek, jak i kąty. System ten umożliwia przyswajanie podstaw szkolnej geometrii, a w następstwie tego procesu podlega dalszemu rozwojowi (Battista 2007; van Hiele 1959).

Na koniec tej sekcji wspomnieć trzeba jeszcze o filogenezie czułości na geometrię otoczenia. W literaturze dominuje pogląd, że wykazują ją w zasadzie wszystkie kręgowce (Thinus-Blanc i in. 2014). Wskazuje się także, że błędy rotacyjne popełniane są również przez owady (Wystrach i Beugnon 2009), co wskazuje, że czułość na geometrię środowiska ma bardzo długą historię filogenetyczną. Dyskusja jak daleko sięga naturalna historia rdzennych systemów poznawczych daleka jest jednak od konkluzji, gdyż obecnie coraz częściej podnosi się, że modele orientacji przestrzennej owadów, które zakładają że zdolność ta wiąże się z porównywaniem obrazów, zastosowane mogą być także w odniesieniu do orientacji ssaków (Cheng 2008). Istnieje więc możliwość, że czułość na geometrię jest produktem ubocznym ewolucji bardziej podstawowych procesów percepcyjnych.

Reprezentacje geometryczne w „Elementach" Euklidesa

Wyjaśnienie czułości na geometrię środowiska oraz dyspozycji do wykorzystywania jej w orientacji przestrzennej to zaledwie pierwszy krok ku teorii poznania geometrycznego. Kolejnym jest wskazanie mechanizmów kodowania i przetwarzania pojęć. W psychologii poznawczej niemal powszechnie przyjmuje się, że zorganizowane na zasadzie sieci semantycznych pojęcia są podstawowymi jednostkami wiedzy, które umożliwiają przeprowadzanie rozumowań (Collins i Loftus 1975). Pojęcia geometrii euklidesowej (i matematyki w ogóle) są jednak pojęciami szczególnego typu. Mają (1) charakter abstrakcyjny, (2) są ostre i jednoznaczne, (3) a oparte na nich rozumowania cechują stabilnością (Brożek 2016).

Najpierw przyjrzyjmy się jednak zewnętrznej reprezentacji pojęć geometrycznych w prototypowym studium geometrii – „Elementach" Euklidesa (Fitzpatrick, 2008). Jest ono „prototypowe" dla badań nad poznaniem geometrycznym nie tylko z powodów kulturowo-historycznych, ale również dlatego, że przez wieki służyło za podręcznik do nauki geometrii, a współczesne programy edukacyjne wciąż pozostają pod jego niemałym wpływem (Battista 2007; van Hiele 1959). Stąd też nauka geometrii współcześnie, nie różni się zbyt wiele od tego jak geometria przyswajana była na przestrzeni.

Czytelnik elementów od razu zauważa, że wywód Euklidesa składa się z dwóch typów jednostek: opisanych literami diagramów oraz tekstu. Chociaż nad statusem metodologicznym diagramów wciąż toczą się dyskusje (Avigad i in. 2009), za Netzem (1998, 2003) przyjąć można, że pełnią one następujące funkcje: organizują rozumienie wywodu, są niezbędne dla wyprowadzania wniosków, „spajają" elementy dowodów i tworzą substytut ontologii w dyskursie geometrycznym. Co więcej, mają – by odwołać się do intuicji Proklosa – „podwójną naturę". Z jednej strony każdy diagram reprezentuje konkretną „niedoskonałą" figurę, z drugiej zaś wykorzystujące diagramy twierdzenia geometrii cechują się ogólnością (Proclus 1970, s. 207).

Jak zauważa Netz (1999, 2003) dla Euklidesa, oraz innych matematyków greckich, kluczową rolę odgrywa jednak również inne narzędzie poznawcze. Greckie traktaty matematyczne konstruowane były przy wykorzystaniu specyficznego języka technicznego – tzw. języka formularnego. Atomami tego języka, tj. jego formułami, są typowe, semantycznie niekompozycyjne zwroty, powtarzane wielokrotnie. W traktatach greckich matematyków Netz zlokalizował około 200 takich formuł (dla przykładu: „narysujmy koło [A] o środku [B] i promieniu [C]"; „stosunek [obiektu] do [obiektu] jest taki sam jak stosunek [obiektu] do [obiektu]"; „[litera] ma się do [litera], tak jak [litera] do [litera]"). Język formularny pełni wiele funkcji: mnemotechniczną (ułatwia opanowanie podstaw geometrii), formalną (umożliwia orientację w logicznej strukturze wywodu; Netz argumentuje, że greckie pojęcie dedukcji zrodziło się za sprawą interakcji dwóch narzędzie poznawczych: diagramów i formuł), transpozycyjną (umożliwia przenoszenie rozumowań do kolejnych problemów), a także prowadzi do abstrakcji, czyli przejścia od konkretnych przypadków (reprezentowanych diagramami) do prawd ogólnych. Podsumowując, pojęcia geometrii euklidesowej oraz oparte na nich rozumowania reprezentowane są zewnętrznie na drodze interakcji opisanych literami diagramów oraz formuł językowych.

Poznawcza architektura dla pojęć geometrycznych

Spróbujemy teraz zidentyfikować architekturę poznawczą, umożliwiającą wewnętrzne (mentalne) kodowanie dyskursu geometrycznego. Tradycyjnie w kognitywistyce pojęcia rozumiane były jako amodalne reprezentacje umysłowe, odnoszące się do zbiorów obiektów ze względu na istotne własności tych obiektów (Fodor 1975; Smith i Medin 1981). Amodalne, gdyż zakładano, że za kodowanie i przetwarzanie pojęć odpowiedzialne są wyspecjalizowane w tym zadaniu systemy – i powiązane z nimi struktury mózgowe – odrębne od percepcji i kontroli ruchu. W takim ujęciu, pojęcie „trójkąt" rozumiane jest jako reprezentacja propozycjonalna, uwzględniająca cechę posiadania sumy kątów równej 90 stopni oraz relacje z innymi węzłami sieci semantycznej, takimi jak „figura" czy „trójkąt równoboczny".

W ostatnich dekadach rośnie jednak liczba zwolenników „ucieleśnionego poznania", programu badawczego, który kwestionuje powyższy pogląd na naturę pojęć (Clark 2009; Gibbs 2005; Wilson 2002). Twierdzą oni, że pojęcia ugruntowane są w aktywności sensoryczno-motorycznej, co w ogólniejszej perspektywie wiąże się z przekonaniem, że ciało ogranicza – lub wręcz konstytuuje – przebieg procesów poznawczych. „Ucieleśnione" spojrzenie na pojęcia nie jest jednak jednorodne, co w interesującym nas kontekście przejawia się w kwestii znaczeniowej treści pojęć (Meteyard i in. 2012).

Zwolennicy silnej wersji „ucieleśnienia" twierdzą, że znaczenie pojęć zależy w pełni od cielesnego ugruntowania (Glenberg i in. 2008; Pulvermüller 2013). Jedną z odmian tego podejścia jest „ucieleśniona matematyka" Lakoffa i Núñeza (2000). Ich zdaniem *wszystkie* abstrakcyjne pojęcia matematyczne powstają na bazie pojęć konkretnych za pośrednictwem metafor pojęciowych (przykładowo: liczby naturalne konceptualizowane mogą być jako punkty na prostej, a zbiory jako pojemniki). Co ciekawe, choć Lakoff i Núñez w ten sposób wyjaśniają pojęcia m.in. z dziedziny algebry Boole'a, teorii mnogości czy analizy matematycznej, słowo „geometria" pada w ich pracy zaledwie kilkukrotnie. Nie oznacza to oczywiście, że teorii tej nie dałoby się uzupełnić o geometrię euklidesową (istnieją zresztą takie próby, zob. Lappas i Spyrou 2006).

Problem polega jednak na tym, że choć teoria metafor zyskała sporą popularność wśród teoretyków, nie okazała się zbyt płodna w testowalne empirycznie przewidywania. Co więcej, podejście to kwestionowane jest od strony psychologii rozwojowej (zdolność do rozumienia metafor zdaje się być późniejsza niż rozumienie niektórych pojęć abstrakcyjnych, por. Murphy 1996), neuronauki (podczas przetwarzania pojęć abstrakcyjnych nie zawsze obserwuje się aktywacje struktur sensoryczno-motorycznych, a nawet jeśli, to kwestionuje się ich przyczynową rolę w przetwarzaniu pojęć, por. Chatterjee 2010; zob. także Paivio 1986 na temat rozróżnienia pojęć na abstrakcyjne i konkretne); a także historii i filozofii matematyki (Lakoff i Núñez ignorują rzeczywisty rozwój pojęć i teorii matematycznych, por. Pogonowski 2011; Netz, 2003, zauważa, że w greckiej geometrii metafora nie była środkiem tworzenia nowych formuł).

Wszystko to oznacza, że propozycja Lakoffa i Núñeza (2000) nie stanowi raczej dobrej podstawy dla wyjaśnienia genezy pojęć geometrycznych. W ogólniejszej perspektywie, pojęcia abstrakcyjne, w tym matematyczne, stanową poważne wyzwanie dla całej idei ucieleśnionego poznania (Mahon i Caramazza 2008). Nie oznacza to jednak, że w badaniach nad poznaniem matematycznym „ucieleśnienie" jest niepopularne (Wołoszyn i Hohol 2017), czego reprezentatywnym przykładem jest zagadnienie liczenia na palcach (por. nasz przegląd badań: Cipora i in. 2014). W tym kontekście wskazuje się, że teoria pojęć matematycznych powinna wyjaśniać zarówno obecność „ucieleśnionych" efektów, jak i uwarunkowania sytuacyjne oraz wpływy kulturowe (Fischer 2012).

Obiecującą propozycją w tym zakresie zdaje się być zaproponowana i rozwijana przez Dove'a (2009; 2011; 2014) „teoria ucieleśnionego i od-cieleśnionego poznania" (używa on ang. terminu *dis-embodied*, który wskazuje, że nie chodzi po prostu „brak ucieleśnienia"). Ponieważ propozycja ta nie zakłada, że ciało w pełni determinuje znaczeniową treść pojęć, sytuuje się ona po stronie bardziej umiarkowanego (słabszego) podejścia do „ucieleśnienia" niż teoria Lakoffa i Núñeza (2000). Jest ona również umiarkowana w innym sensie – w przeciwieństwie do zwolenników „radykalnego ucieleśnienia", takich jak Chemero (2011), Dove stara się pogodzić „ucieleśnienie" z reprezentacyjnym ujęciem umysłu. Jego propozycja stanowi połączenie dwóch wpływowych idei: teorii symboli percepcyjno-motorycznych Barsalou (1999; 2008) oraz teorii podwójnego kodowania Paivio (1986).

Zgodnie z teorią symboli percepcyjno-motorycznych za przetwarzanie pojęć odpowiadają mózgowe systemy odpowiedzialne pierwotnie za postrzeganie i kontrolę ruchu. W przypadku każdej interakcji z obiektem z danej kategorii w strukturach sensoryczno-motorycznych zaobserwować można określony wzorzec aktywności, tzw. symulator, który kodowany jest w strukturach asocjacyjnych mózgu, określanych jako strefy konwergencji. Wydobywanie wiedzy, np. w celu zastosowania pojęcia w rozumowaniu, polega na odtworzeniu tego wzorca czy też „zasymulowaniu" rzeczywistej interakcji z obiektem. Symulatory są więc symbolami, które reaktywowane mogą być w zachodzących w pamięci roboczej „symulacjach". Propozycja Barsalou zyskała dobre potwierdzenie zarówno w wynikach eksperymentów behawioralnych (Wu i Barsalou 2009), jak i badań z wykorzystaniem technik neuroobrazowania (Simmons i in. 2007).

Zdaniem Dove'a przedstawiony przez Barsalou mechanizm symulacji operować może jednak na dwóch typach kodu reprezentacyjnego: symbolach percepcyjno-motorycznych oraz symbolach związanych z doświadczeniem językowym. W ten sposób nawiązuje on do teorii podwójnego kodowania Paivio (1986), którą uznać można za zwieńczenie klasycznego toczącego się z klasycznej psychologii poznawczej sporu o format reprezentacji umysłowych (Cooper i Shepard 1973; Fodor 1975). Zdaniem Paivio reprezentacje umysłowe mogą mieć formę analogowych „imagenów", które kodują wiedzę na zasadzie percepcyjnego podobieństwa do egzemplarzy, jak i językowych „logogenów", kodujących relacje między symbolami językowymi. Logogeny i imageny wchodzić mogą ze sobą w różnorakie interakcje. Co więcej, reprezentacje tych samych obiektów w zależności od uwarunkowań sytuacyjnych kodowane mogą być w różnych formatach. Wreszcie, jak pokazują badania z zakresu psychologii różnic indywidualnych, ludzie przejawiają pewne preferencje w zakresie dominacji jednego z kodów nad drugim (Kozhevnikov 2007).

Dove (2011, 2014), podobnie jak Paivio (1986), twierdzi, że pojęcia konkretne zazwyczaj kodowane są zarówno jako symbole analogowe, jak i językowe, zaś pojęcia abstrakcyjne przetwarzane są przede językowo. Między tymi propozycjami istnieją jednak różnice. Symbole percepcyjno-motoryczne różnią się od analogowych „imagenów" tym, że nie muszą być one uświadamiane, mogą mieć charakter schematyczny i obejmować mogą wiele modalności. Co jednak ważniejsze, Dove twierdzi, że zarówno przetwarzanie pojęć konkretnych, jak i abstrakcyjnych wykorzystuje (jako nośnik) mechanizm sensoryczno-motorycznej symulacji w sensie Barsalou (1999), z tą jednak różnicą, że o ile zawartość semantyczna pojęć konkretnych wyznaczana jest przez cielesne interakcje z egzemplarzami danej kategorii, pojęcia abstrakcyjne są od-cieleśnione. Jego zdaniem (2011), „symbol umysłowy jest od-cieleśniony jeśli (1) jest ucieleśniony, ale (2) ucieleśnienie to odnosi się arbitralnie do jego zawartości semantycznej" (s. 6). Innymi słowy, choć przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych odbywa się na drodze symulacji, ich znaczenie nie zależy tylko od doświadczeń sensoryczno-motorycznych.

Znaczenie pojęć abstrakcyjnych zależy „powiązań i relacji inferencyjnych z innymi reprezentacjami językowymi" (s. 1). Tymi ostatnimi mogą być ugruntowane sensoryczno-motorycznie pojęcia konkretne, dzięki czemu teoria Dove'a unika problemu ugruntowania symboli. Ostatecznie bazą pojęć geometrycznych są najprawdopodobniej pojęcia, takie jak „kąt", „odległość" czy „kierunek", a więc odnoszące się do informacji na które czułe są systemy rdzenne (Spelke i wsp., 2010). Nie ma tu jednak mowy o odwzorowanych metaforycznych w sensie Lakoffa i Núñeza (2000). To z kolei stwarza możliwość uwzględnienia szerokiego kontekstu historyczno-kulturowego w badaniach do formowaniem się dyskursu geometrii.

Na rzecz tezy o językowym kodowaniu pojęć abstrakcyjnych świadczy konwergencja wyników eksperymentów behawioralnych (Laeng i in. 2003), badań z wykorzystaniem przezczaszkowej stymulacji magnetycznej (Papagno i in. 2009), potencjałów wywołanych (Tanaka i in. 1999) oraz neuroobrazowania (Binder i in. 2005). Wszystkie one wskazują, że przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych angażuje bardziej lewą, wyspecjalizowaną w języku półkulę mózgową, a w szczególności niższy zakręt czołowy (który obejmuje ośrodek Broki) oraz lewą przednio-górną bruzdę skroniową (zob. metaanalizę: Wang i in. 2010).

Współcześnie często podkreśla się, że ewolucyjna geneza ludzkiego języka zachodziła na drodze egzaptacji systemów motorycznych (Arbib 2005). Jak możliwe jest więc, że „ucieleśniony" język jest poznawczym medium, umożliwiającym przetwarzanie „od-cieleśnionych" pojęć abstrakcyjnych? Odpowiedź stanowią własności języka naturalnego. Szczególnie ważne są trzy z nich: reprezentacyjna arbitralność słów i morfemów (nie istnieją pozajęzykowe połączenia między językowymi symbolami i obiektami, do których się odnoszą), niezależność od bodźców (użytkownicy języka mogą generować wypowiedzi, które nie są bezpośrednimi reakcjami na bodźce) oraz systematyczność (wypowiedzi formułowane w języku naturalnym mogą być produktywnie łączone, rozszerzane czy rekombinowane). Język pozwala nam „etykietować" obiekty i zdarzenia, co z kolei przekłada się na odkrywanie abstrakcyjnych wzorców, a „etykiety" te mogą być składnikami rozumowań, prowadzących do abstrakcyjnych wniosków (Dove 2011; Clark 2009).

Niezależnie od „ucieleśnionej" genezy języka, powyższe cechy przypominają własności amodalnych systemów pojęciowych (w sensie Fodora, 1975), dla których abstrakcja nie stanowiła większego problemu. Pojęcia geometryczne odznaczają się jednak również innymi cechami: są jednoznaczne i stabilne (Brożek 2016). Teoria ucieleśnionego i od-cieleśnionego poznania radzi sobie również i z nimi. Przyswojenie języka naturalnego, co do zasady wzbogaca i rozszerza ludzkie zdolności reprezentacyjne dając dostęp do arbitralnego i nieczułego na kontekst (ang. *context-free*) systemu symbolicznego. Składający się z powtarzalnych formuł (w sensie Netza, 1999) język geometrii jeszcze bardziej wyostrza generatywne cechy języka. Mając do dyspozycji zestaw formuł możemy przenosić je między problemami i odnosić do diagramów, nadając niedoskonałym reprezentacjom graficznym precyzyjne znaczenie. Jak pokazuje historia geometrii euklidesowej oraz współczesna edukacja matematyczna, język formularny okazał się stabilny – stanowi on dobre narzędzie przekazu wiedzy kolejnym pokoleniom, sprzyjając akumulacji wiedzy.

Podsumowanie

Celem niniejszego rozdziału była próba wstępnego wskazania kluczowych komponentów teorii poznania matematycznego. Starałem się pokazać, że naukowe wyjaśnianie ludzkich kompetencji geometrycznych powinno rozpocząć się od wskazania biopsychologicznych podstaw czułości na geometrię, cechy którą ludzie współdzielą z innymi zwierzętami. Mechanizmami odpowiedzialnymi za tę kompetencję są najprawdopodobniej rdzenne systemy poznawcze, służące pierwotnie orientacji przestrzennej oraz rozpoznawaniu kształtów. Kolejnym komponentem jest język, który dostarcza rekombinowanego systemu symboli, rozszerzającego nasze zdolności geometryczne oparte na działaniu rdzennych systemów poznawczych, prowadząc do powstania nowego systemu reprezentacyjnego. System ten uwzględnia abstrakcyjne pojęcia geometryczne. Ich przetwarzanie wyjaśnione może być na gruncie umiarkowanej teorii ucieleśnionego poznania – polega ono na sensoryczno-motorycznych symulacjach, które operują na symbolach językowych, a co za tym idzie znaczenie pojęć nie jest determinowane w pełni przez ciało. Własności języka, takie jak arbitralność morfemów, niezależność od bodźców oraz systematyczność, mogą być wykorzystywane zarówno w wyjaśnianiu historycznego rozwoju geometrii (stosowanie języka formularnego), jak i indywidualnego przyswajania geometrii euklidesowej.

Literatura cytowana

Adams, J., Barmby, P. i Mesoudi, A. red., 2017. *The nature and development of mathematics: Cross-discplinary perspectives on cognition, learning and culture*, New York: Routledge.

Amalric, M. et al., 2017. The language of geometry: Fast comprehension of geometrical primitives and rules in human adults and preschoolers. *PLoS Computational Biology*, 13(1), e1005273–31.

Amalric, M. i Dehaene, S., 2016. Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(18), ss.4909–4917.

Arbib, M., 2005. From monkey-like action recognition to human language: An evolutionary framework for neurolinguistics. *Behavioral and Brain Sciences*, 28(2), ss.105–124; discussion 125–167.

Avigad, J., Dean, E. i Mumma, J., 2009. A formal system for Euclid's Elements. *Review of Symbolic Logic*, 2(4), ss.700–768.

Barsalou, L.W., 2008. Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, 59, ss.617–645.

Barsalou, L.W., 1999. Perceptual symbol systems. *Behavioral and Brain Sciences*, 22(4), ss.577–660.

Battista, M.T., 2007. The development of geometric and spatial thinking. W: F. K. Lester Jr, red. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Information Age Publishing, ss. 843–908.

Bechtel, W., 2016. Investigating neural representations: the tale of place cells. *Synthese*, 193(5), ss.1287–1321.

Berch, D.B., Geary, D.C. i Koepke, K.M., 2015. *Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences*, Amsterdam: Academic Press.

Binder, J.R. i in., 2005. Distinct brain systems for processing concrete and abstract concepts.

Journal of Cognitive Neuroscience, 17(6), ss.905–917.
Biro, D. i Matzusawa, T., 2001. Chimpanzee numerical competence: cardinal and ordinal skills. In T. Matzusawa, red. *Primate Origins of Human Cognition and Behavior*. Tokyo: Springer, ss. 199–225.
Brożek, B., 2016. *Szósty zmysł: Gdy myśl sięgnęła abstrakcji*, Kraków: Copernicus Center Press.
Brożek, B. i Hohol, M., 2017. *Umysł matematyczny* 3 wyd., Kraków: Copernicus Center Press.
Bugden, S. i Ansari, D., 2011. Individual differences in children's mathematical competence are related to the intentional but not automatic processing of Arabic numerals. *Cognition*, 118(1), ss.32–44.
Butterworth, B., 1999. *The mathematical brain*, Oxford: Macmillan.
Campbell, J.I.D., 2005. *Handbook of mathematical cognition*, New York: Psychology Press.
Chatterjee, A., 2010. Disembodying cognition. *Language and Cognition*, 2(1), ss.79–116.
Chemero, A., 2011. *Radical embodied cognitive science*, Cambridge, MA: The MIT Press.
Cheng, K., 1986. A purely geometric module in the rat's spatial representation. *Cognition*, 23(2), ss.149–178.
Cheng, K., 2008. Whither geometry? Troubles of the geometric module. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(9), ss.355–361.
Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C. i in., 2016. Professional mathematicians differ from controls in their spatial-numerical associations. *Psychological Research*, 80(4), ss.710–726.
Cipora, K., Szczygieł, M. i Hohol, M., 2014. Palce, które liczą – znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego. *Psychologia - Etologia - Genetyka*, 30, ss.59–73.
Clark, A., 2009. *Supersizing the mind: Embodiment, action, and cognitive extension*, Oxford: Oxford University Press.
Cohen Kadosh, R. i Dowker, A. red., 2015. *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*, Oxford: Oxford University Press.
Collins, A.M. & Loftus, E.F., 1975. A spreading-activation theory of semantic processing. *Psychological Review*, 82(6), pp.407–428.
Cooper, L.A. i Shepard, R.N., 1973. Chronometric studies of the rotation of mental images. W: W. G. Chase, red. *Visual Information Processing: Proceedings*. New York: Academic Press, ss. 75–176.
Dehaene, S., 2011. *The number sense* Revised, Oxford: Oxford University Press.
Dehaene, S. i Brannon, E.M. red., 2011. *Space, Time and Number in the Brain*, Amsterdam: Academic Press.
Dehaene, S. i in., 2003. Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20(3-6), ss.487–506.
Dębiec, J., 2002. *Mózg i matematyka*, Tarnów: Biblos.
Dove, G., 2009. Beyond perceptual symbols: A call for representational pluralism. *Cognition*, 110(3), ss.412–431.
Dove, G., 2011. On the need for embodied and dis-embodied cognition. *Frontiers in psychology*, 1.
Dove, G., 2014. Thinking in words: Language as an embodied medium of thought. *Topics in Cognitive Science*, 6(3), ss.371–389.
Fischer, M.H., 2012. A hierarchical view of grounded, embodied, and situated numerical cognition. *Cognitive Processing*, 13(S1), ss.161–164.
Fitzpatrick, R. (red.). (2008). *Euclid's Elements of geometry*. na podstawie: *Euclidis Elementa*, I. L. Heiberg (1883). dostęp on-line: http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf
Fodor, J.A., 1975. *The language of thought*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
Fodor, J.A., 1983. *The modularity of mind*, Cambridge, MA: The MIT Press.
Gallistel, C., 1990. *The organization of learning*, Cambridge, MA: The MIT Press.
Gee, A.P. i in., 2008. Discovering higher level structure in visual SLAM. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5), ss.980–990.

Gibbs, R., 2005. *Embodiment and cognitive science*, Cambridge: Cambridge University Press.

Glenberg, A.M. i in., 2008. Processing abstract language modulates motor system activity. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 61(6), ss.905–919.

Göbel, S.M. i in., 2014. Children's arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number sense, that counts. *Psychological Science*, 25(3), ss.789–798.

Henik, A. red., 2016. *Continuous issues in numerical cognition*, London: Academic Press.

Hermer, L. i Spelke, E.S., 1994. A geometric process for spatial orientation in young children. *Nature*, 370(3), ss.57–59.

Hermer, L. i Spelke, E.S., 1996. Modularity and development: the case of spatial reorientation. *Cognition*, 61(3), ss.195–232.

Hohol, M. i in., 2017. Bringing back the balance: domain-general processes are also important in numerical cognition. *Frontiers in psychology*, 8(499), ss.17–5.

Kail, R., Pellegrino, J. i Carter, P., 1980. Developmental changes in mental rotation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 29(1), ss.102–116.

Kinzler, K.D. i Spelke, E.S., 2007. Core systems in human cognition. *Progress in Brain Research*, 164, ss.257–264.

Kozhevnikov, M., 2007. Cognitive styles in the context of modern psychology: Toward an integrated framework of cognitive style. *Psychological Bulletin*, 133(3), ss.464–481.

Laeng, B., Zarrinpar, A. i Kosslyn, S.M., 2003. Do separate processes identify objects as exemplars versus members of basic-level categories? Evidence from hemispheric specialization. *Brain and cognition*, 53(1), ss.15–27.

Lakoff, G. i Núñez, R.E., 2000. *Where mathematics comes from*, New York: Basic Books.

Landy, D., Allen, C. i Zednik, C., 2014. A perceptual account of symbolic reasoning. *Frontiers in psychology*, 5(APR).

Lappas, D. & Spyrou, P., 2006. A reading of Euclid's elements as embodied mathematics and its educational implications. *The Mediterranean journal for research in mathematics education*, *5*(1), pp.1–16.

Mahon, B.Z. i Caramazza, A., 2008. A critical look at the embodied cognition hypothesis and a new proposal for grounding conceptual content. *Journal of Physiology Paris*, 102(1-3), ss.59–70.

Meteyard, L. i in., 2012. Coming of age: A review of embodiment and the neuroscience of semantics. *Cortex*, 48(7), ss.788–804.

Miłkowski, M., 2014. Wyjaśnianie w kognitywistyce. *Przegląd Filozoficzny - Nowa Seria*, 2(86), ss.151–166.

Moser, E.I. i in., 2014. Grid cells and cortical representation. *Nature Publishing Group*, 15(7), ss.466–481.

Moyer, R.S. i Landauer, T.K., 1967. Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215(5109), ss.1519–1520.

Murphy, G.L., 1996. On metaphoric representation. *Cognition*, 60(2), ss.173–204.

Netz, R., 1998. Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning. *For the learning of mathematics*, 18(3), ss.33–39.

Netz, R., 1999. Linguistic formulae as cognitive tools. *Pragmatics i Cognition*, 7(1), ss.147–176.

Netz, R., 2003. *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history*, Cambridge: Cambridge University Press.

O'Keffe, J. i Dostrovsky, J., 1971. The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat. *Brain research*, 34(1), ss.171–175.

O'Keffe, J. i Nadel, L., 1978. *The hippocampus as a cognitive map*, Oxford: Oxford University Press.

Paivio, A., 1986. *Mental representations: A dual coding approach*, Oxford University Press.

Papagno, C. i in., 2009. The lexical processing of abstract and concrete nouns. *Brain research*, 1263, ss.78–86.

Piaget, J., 1942. *Child's conception of number*, London: Routledge.

Piaget, J., Inhelder, B. i Szeminska, A., 1981. *The child's conception of geometry*, New York: W.

W. Norton Company.

Pogonowski, J., 2011. Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae*, 23, ss.106–147.

Proclus, 1970. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Princeton: Princeton University Press.

Pulvermüller, F., 2013. How neurons make meaning: brain mechanisms for embodied and abstract-symbolic semantics. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(9), ss.458–470.

Saxe, G.B., 2014. *Cultural development of mathematical ideas: Papua New Guinea studies*, Cambridge: Cambridge University Press.

Simmons, W.K. i in., 2007. A common neural substrate for perceiving and knowing about color. *Neuropsychologia*, 45(12), ss.2802–2810.

Smith, E.E. i Medin, D.L., 1981. *Categories and concepts*, Cambridge: Harvard University Press.

Spelke, E.S., Lee, S.A. i Izard, V., 2010. Beyond core knowledge: Natural geometry. *Cognitive Science*, 34(5), ss.863–884.

Tanaka, J. i in., 1999. Tracking the time course of object categorization using event-related potentials. *NeuroReport*, 10(4), ss.829–835.

Thinus-Blanc, C. i in., 2014. The encoding of geometry in various vertebrate spacies. In F. L. Dolins i R. W. Mitchell, red. *Spatial cognition, spatial perception*. Cambridge: Cambridge University Press, ss. 99–116.

Tinbergen, N., 1963. On aims and methods of ethology. *Zeitschrift für Tierpsychologie*, 20(3), ss.410–433.

Tolman, E.C., 1948. Cognitive maps in rats and men. *Psychological review*, 55(4), ss.189–208.

van Hiele, P.M., 1959. Development and the learning process. *Acta Paedagogica Ultrajectina*, (17), ss.1–31.

Vauclair, J., Fagot, J. i Hopkins, W.D., 1993. Rotation of mental images in baboons when the visual input is directed to the left cerebral hemisphere. *Psychological Science*, 4(2), ss.99–103.

Wang, J. i in., 2010. Neural representation of abstract and concrete concepts: A meta-analysis of neuroimaging studies. *Human Brain Mapping*, 31(10), ss.1459–1468.

Wilson, M., 2002. Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin i Review*, 9(4), ss.625–636.

Wołoszyn, K. i Hohol, M., 2017. Commentary: The poverty of embodied cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(845).

Wu, L.-L. i Barsalou, L.W., 2009. Perceptual simulation in conceptual combination: Evidence from property generation. *Acta psychologica*, 132(2), ss.173–189.

Wystrach, A. i Beugnon, G., 2009. Ants learn geometry and features. *Current Biology*, 19(1), ss.61–66.