

KRZYSZTOF CIPORAINSTYTUT PSYCHOLOGII, UNIwersYTET JagIELLOŃSKI,
CENTRUM KOPERNIKA BADAŃ INTERDYSCYPLINARNYCH W KRAKOWIE**MONIKA SZCZYGIEL**

INSTYTUT PSYCHOLOGII, UNIwersYTET JagIELLOŃSKI

MATEUSZ HOHOLWYDZIAŁ FILOZOFICZNY, UNIwersYTET PAPIESKI JANA PAWŁA II W KRAKOWIE,
CENTRUM KOPERNIKA BADAŃ INTERDYSCYPLINARNYCH

PALCE, KTÓRE LICZĄ – ZNACZENIE LICZENIA NA PALCACH DLA POZNANIA MATEMATYCZNEGO U CZŁOWIEKA DOROSŁEGO

STRESZCZENIE

Zjawisko liczenia na palcach jest obecne w większości kultur i odgrywa ważną rolę w poznaniu matematycznym u osób dorosłych. Wywarło ono także wpływ na ukształtowanie się matematyki we współczesnej formie. Dane neuropsychologiczne i wyniki badań z wykorzystaniem metod neuroobrazowania wskazują na wzajemne powiązania między mózgową reprezentacją liczb i reprezentacją z użyciem palców. W pewnych przypadkach liczenie na palcach jest wykorzystywane przez osoby dorosłe jako sposób na odciążenie pamięci roboczej, np. podczas obliczeń kalendarzowych. Mimo powszechności tej praktyki, można zaobserwować bardzo duże zróżnicowanie międzykulturowe i międzypersoniczne w jej stosowaniu. Poza znaczeniem dla psychologii poznania matematycznego badania nad liczeniem na palcach mogą służyć weryfikacji hipotez w zakresie ucieleśnionego poznania, ujawniając fizjologiczne podłoże pojęć abstrakcyjnych.

**FINGERS COUNT: THE ROLE OF FINGER COUNTING IN ADULT
NUMERICAL COGNITION****ABSTRACT**

Finger counting being present in vast majority of cultures, plays very important role in the mathematical cognition. The practice of finger counting had large impact on the development of mathematics in a form we all know. Both neuropsychological studies and recent developments in cognitive neuroscience show close relationship between numerical and finger representations. Educated adults sometimes use finger counting as a backup strategy in order to reduce working memory load e.g. in calendar calculations. Despite commonness of finger counting, there are considerable between cultural and interindividual differences in finger counting. Apart from its role in numerical cognition, relations between number representations and fingers lend strong support to the embodied cognition hypotheses showing clearly that abstract concepts of numbers are anchored in bodily representations.

WPROWADZENIE

Ze względów czysto praktycznych palce stanowią dobrą pomoc podczas liczenia (Butterworth, 1999). Jest tak, ponieważ: 1) palce są zawsze dostępne (dosłownie mamy je pod ręką, *handy*); 2) łatwo nimi manipulować, gdyż najczęściej nie są zakryte przez ubranie; 3) reprezentują kolejne dyskretne wartości i zawsze są uporządkowane w ten sam sposób; 4) są łatwo rozróżnialne percepcyjnie i łatwo zachować jednoznaczność odpowiedniość między palcami a liczonymi obiektami; 5) palce można wykorzystywać zarówno do określenia liczby kardynalnej (liczebności zbioru), jak i liczby porządkowej (kolejności obiektów). Liczenie na palcach pozwala odciążyć pamięć roboczą podczas wykonywania operacji matematycznych oraz systematycznie kontrolować poprawność (np. przy obliczaniu dni na kalendarzu). Palce wykorzystywane są również do komunikowania liczb innym osobom. Przez długi czas liczenie na palcach uznawano za jedynie przejściowy etap w nabywaniu kompetencji matematycznych, który powinien być jak najszybciej zastąpiony przez bardziej dojrzałe strategie. W ostatnich dwóch dekadach pogląd ten uległ jednak radykalnej zmianie. Wyniki wielu badań wskazują, że liczenie na palcach oraz sprawność funkcjonowania umysłowej reprezentacji palców odgrywają istotną rolę w poznaniu matematycznym. Praktyka takiego obrachunku ma wpływ na nabywanie, budowanie i zdobywanie dostępu do znaczenia liczb (DiLuca, Pesenti, 2011). W konsekwencji liczenie na palcach uznaje się obecnie raczej za przejaw ucieleśnionego poznania niż przejściowy etap rozwojowy. Oznacza to m.in., że do tworzenia abstrakcyjnych pojęć wykorzystywane są te same obwody neuronalne, które pierwotnie służyły do wykonywania operacji percepcyjnych i motorycznych (Domahs, Kaufmann, Fischer, 2012). Dowody na rzecz nowego podejścia pochodzą z badań rozwojowych, międzykulturowych, neuropsychologicznych oraz neuronaukowych.

Przejawem dużego zainteresowania liczeniem na palcach jest m.in. fakt, że zagadnieniu temu poświęcono specjalny numer czasopisma *Frontiers in Psychology* (2011). W polskojęzycznej literaturze ów temat pojawiał się głównie w kontekście rozwoju kompetencji matematycznych (Gruszczyk-Kolczyńska, Zielińska, 2009; Gruszczyk-Kolczyńska, 2012). Znaczeniu liczenia na palcach dla poznania matematycznego u dzieci poświęcono w całości inne opracowanie (Szczygiel, Cipora, Hohol, w przygotowaniu). W niniejszej pracy natomiast przedstawiono problematykę liczenia na palcach, uwzględniając perspektywę filogenetyczną, znaczenie u osób dorosłych oraz zróżnicowanie międzykulturowe.

PERSPEKTYWA FILOGENETYCZNA

Jak argumentują Andres, Di Luca i Pesenti (2008; Fayol, Seron, 2005), liczenie na palcach stanowi ogniwo łączące wrodzoną predyspozycję do przetwarzania informacji o ilości (*quantity*) – czyli tzw. zmysł numeryczny (*number sense*; Dehaene, 2011; Cipora, Szczygieł, 2013a) – z symbolicznym systemem liczb. Zdaniem Andresa i współpracowników (2008; Butterworth, 1999) zasady liczenia na palcach są bardzo podobne do zasad operowania na liczbach naturalnych (stała kolejność palców/liczb w sekwencji liczenia). Ze względu na to, że palce zajmują stałą pozycję w obrębie dłoni (Wiese, 2003), posługiwanie się nimi może służyć nie tyle ukształtowaniu pojęcia liczby, co przejściu między reprezentacją ikoniczną (bezpośrednią odpowiednością między obiektem a symbolem, gdzie jeden obiekt odpowiada jednemu palcowi) a zapisem symbolicznym, w którym nie ma takiej zależności (cyfra 6 nie składa się z sześciu elementów). Stała kolejność liczenia ma z kolei kluczowe znaczenie dla przypisania symboli-liczb konkretnym wielkościom. W takim ujęciu tworzenie się liczb rozpoczęło się liczeniem na palcach. Następnie temu procesowi zaczęły towarzyszyć wypowiadane nazwy, które później funkcjonowały już niezależnie (Wiese, 2003).

Istnieje szereg dowodów wskazujących, że liczenie na palcach pojawiło się w filogenezie człowieka bardzo wcześnie, a ponadto że powstało niezależnie w różnych kulturach i obszarach świata. Pierwsze ślady tego zjawiska, pochodzące sprzed 27 tys. lat, odkryto w jaskini Cosquer we Francji. Maczane w pigmentcie palce ówczesni ludzie odciskali na ścianie. Odkryte układy takich śladów były bardzo regularne, rozpoczynały się od kciuka (Göbel, Shaki, Fischer, 2011). Na jeszcze wcześniejsze, choć mniej jednoznaczne dowody wykorzystania palców do liczenia wskazuje Wiese (2003) – odkryta kość sprzed 30 tys. lat pokryta jest nacięciami pogrupowanymi po pięć. Może to sugerować, że w owym czasie do liczenia wykorzystywany był system piątkowy.

Praktyka liczenia na palcach w istotny sposób ukształtowała współczesną matematykę. Zdaniem niektórych badaczy system dziesiętny wywodzi się właśnie z niej (Butterworth, 1999). Pod względem praktycznym bowiem, przez większą liczbę dzielników liczby 12, korzystniejszy byłby system dwunastkowy. Co więcej, w wielu językach określenia niektórych liczb wywodzą się bezpośrednio z liczenia na palcach. Przykładowo słowa określające liczbę 5 bardzo często pochodzą od słów określających pięść. W wielu językach również określenia liczb 11 i 12 są nieregularne, a pochodzą od określeń w rodzaju „jeden został”, „dwa zostały” (Brysbaert, 2005). Również w językach z rejonu Papui-Nowej Gwinei słowa oznaczające liczby odnoszą się do nazw palców (Beller, Bender, 2008). W indiańskim języku Dene-Dinje nazwy liczb 1–5 pochodzą bezpośrednio od reprezentujących je układów palców („końcowy jest zgięty”; Wiese, 2003).

MÓZGOWE REPREZENTACJE PALCÓW I POZNANIE MATEMATYCZNE

Dotychczas zaproponowano dwa wytłumaczenia wzajemnych powiązań między gnozją palców a poznaniem matematycznym. Zgodnie z wyjaśnieniem funkcjonalistycznym związki te wynikają z powszechnego używania palców podczas liczenia. Zakłada się tu relację przyczynową: gnozja palców jest pierwotna wobec poznania matematycznego. Penner-Wilger i Anderson (2008) zakładają, że związki te można wyjaśnić, odwołując się do hipotez przesunięcia (*redeployment*) funkcji neuronów lub recyklingu neuronów. Pierwsza hipoteza głosi, że neurony przystosowane ewolucyjnie do wykonywania określonego zadania mogą na skutek egzaptacji przyjąć nowe role, zachowując jednocześnie swoją pierwotną funkcję. Z kolei zgodnie z hipotezą recyklingu obwody neuronalne, które w toku filogenezy wykształciły się do subityzowania (bezwysiłkowego określania liczebności zbiorów, które mają nie więcej niż cztery elementy; Cipora, Szczygieł, 2013a), na skutek rozwoju kulturowego zaczęły być wykorzystywane do arytmetyki. Ta druga hipoteza uwzględnia obniżenie wydajności pierwotnej funkcji neuronów. Alternatywne wobec podejścia funkcjonalistycznego jest podejście lokalizacjonistyczne. Zgodnie z nim związki gnozji palców z poznaniem matematycznym wynikają z fizycznej bliskości obwodów neuronalnych, które są zasilane przez te same naczynia krwionośne. Wyjaśnienie to nie ujmuje relacji przyczynowych (Penner-Wilger, Anderson, 2008; Costa i in., 2011).

Na potencjalne związki między umysłową reprezentacją palców a zdolnością liczenia jako jeden z pierwszych uwagę zwrócił Joseph Gerstmann pod koniec pierwszej połowy XX w., opisując zespół objawów związanych z uszkodzeniem lewego zakrętu kąтового (Rusconi, Pinel, Dehaene, Kleinschmidt, 2010). Obszar ten leży na styku skroniowo-ciemieniowo-potylicznym i określany jest czasem jako obszar asocjacyjny obszarów asocjacyjnych, gdyż na podstawie znaczenia łączy informacje pochodzące z różnych modalności zmysłowych (Roux, Boetto, Sacko, Chollet, Trémolet, 2003). Wspomniany zespół Gerstmann'a obejmuje: agnozę palców (niemożność ich nazywania, wskazywania u siebie i u innej osoby; jest to kluczowy objaw), akalkulię (upośledzenie lub niemożność wykonywania działań arytmetycznych), agrafię (deficyty w zakresie pisania) oraz zaburzenia orientacji lewa–prawa strona (Darby, Walsh, 2008). Choć przez wiele lat istnienie zespołu Gerstmann'a było kwestionowane (Rusconi i in., 2010), wyniki badań przeprowadzonych w ostatnich latach wskazują, że obszary mózgu odpowiedzialne za reprezentowanie liczb i mózgową reprezentację palców są oddzielne, jednak leżą bardzo blisko siebie i są unaczynione przez tę samą tętnicę. Zespół Gerstmann'a wynika najprawdopodobniej

z dyskoneksji szlaków istoty białej, łączącej lewy zakręt kątowy z bruzdą śródcieniową (Roux i in., 2003). Poprzez bezpośrednią elektryczną stymulację mózgu uzyskano objawy identyczne jak w zespole Gerstmann'a (Roux i in., 2003). Jak konkludują autorzy badań, rzadkie występowanie opisanego zespołu objawów w czystej formie wynika z tego, że lezja musi obejmować bardzo niewielki obszar, by nie naruszyć blisko leżących struktur mózgowych odpowiedzialnych za funkcje językowe.

O związkach procesów liczenia na palcach z operowaniem na liczbach świadczą także inne przypadki kliniczne. Osoby cierpiące na dyskalkulię często wspomagają się rachunkiem na palcach, co pozwala na zwolnienie zasobów pamięci roboczej. Gdy osoby takie zostają pozbawione możliwości liczenia na palcach, popełniają znacznie więcej błędów (Kaufmann, 2002).

Liczenie na palcach wykorzystywane jest także przez niektóre osoby posiadające ponadprzeciętne umiejętności w zakresie wykonywania obliczeń arytmetycznych (Pesenti, 2005). Znany jest również przypadek synestezji wyższego rzędu, dotyczący znaczenia liczb. Doznania kolorów były wzbudzone przez liczby, bez względu na formę zapisu – mogły to być cyfry, układy kropek lub układy palców. Pacjent licząc na palcach poprzez ich prostowanie, widział kolory powiązane z daną liczebnością (Ward, Sagiv, 2007).

Bogate dane wskazują na wzajemne powiązania między procesami operowania na liczbach a operowaniem na palcach u osób dorosłych o typowym poziomie umiejętności matematycznych i niecierpiących na żadne dysfunkcje. Zarówno na poziomie behawioralnym, jak i neuronalnym przetwarzanie liczb wiąże się z aktywacją umysłowych reprezentacji palców. Imbo, Vandierendonck i Fias (2011) wykazali, że wykonanie działań arytmetycznych z liczeniem (ale nie przywoływaniem wyniku z pamięci) było mniej skuteczne, jeżeli w tym samym czasie eksperymentator poruszał ręką osoby badanej. Dane uzyskane przez Tschentscher, Hauka, Fischera i Pulvermüllera (2012) wskazują natomiast, że w czasie biernego obserwowania liczb jednocyfrowych rośnie aktywacja kory motorycznej, odpowiedzialnej za ruchy palców podczas obrachunku. Zaobserwowany efekt zależny był od indywidualnych zwyczajów liczenia na palcach. U osób zaczynających liczenie od lewej ręki podczas prezentacji małych liczb rosła aktywacja prawej kory motorycznej. Z kolei w przypadku osób zaczynających od prawej ręki – aktywacja lewej kory motorycznej. Przywoływanie z pamięci wyników prostych działań arytmetycznych powoduje aktywację obwodów przedruchowych podobną do obserwowanej podczas uczenia się sekwencji ruchów palców czy manipulowania trójwymiarowymi obiektami (Zago, Pesenti, Mellet, Crivello, Mazoyer, Tzourio-Mazoyer, 2001).

Z kolei Sato, Cattaneo, Rizzolatti i Gallese (2007) oraz Andres, Seron i Olivier (2007) w badaniach z wykorzystaniem przeczaszkowej stymu-

lacji magnetycznej (TMS) wykazali zmiany pobudliwości korowej (*corticospinal excitability*) dla mięśni dłoni podczas liczenia. Strona, po której obserwowano zwiększoną pobudliwość, zależna była od wielkości liczb wykorzystywanych w działaniach oraz od strony, po której osoby badane zaczynały liczenie na palcach. Wykonywanie zadań arytmetycznych wiąże się z aktywacją lewego zakrętu przedśrodkowego. Aktywność tej struktury obserwowana jest również podczas poruszania palcami (Sato i in., 2007). Wyniki omówionych tu badań skłoniły Andresa i in. (2007) do sformułowania przedmotorycznej teorii liczenia. Twierdzi ona, że obliczanie polega na symulowanych, choć niewykonywanych fizycznie ruchach palców; stąd też obserwowane jest pobudzenie kory motorycznej podczas liczenia. Teoria ta jest analogiczna do przedmotorycznej teorii uwagi (Rizzolatti, Riggio, Dascola, Umiltà, 1987; Andres, Seron, Olivier, 2007), zgodnie z którą orientacja uwagi to planowane, ale niewykonywane fizycznie ruchy oczu. Jak pokazali Rusconi, Walsh i Butterworth (2005), powtarzalna przezczaszkowa stymulacja magnetyczna (rTMS) w obszarze lewego zakrętu kąтового zaburza wykonanie zadań obejmujących dostęp do schematów palców, jak również przetwarzanie wielkości liczbowej.

O znaczeniu liczenia na palcach świadczą również wyniki uzyskane przez Klein, Moellera, Willmesa, Nuerka i Domahsa (2011). Czas podania wyniku dodawania był wyższy, jeżeli wynik znajdował się w innej piątce niż składniki. Efekt ten jest jeszcze silniejszy u dzieci (Domahs, Krinzinger, Willmes, 2008). Innymi słowy osoby badane do pewnego stopnia reprezentują liczby w systemie piątkowym, opartym na schemacie posługiwania się palcami. Jak z kolei podają Domahs, Moeller, Huber, Willmes i Nuerk (2010), czasy porównywania par liczb były dłuższe, jeśli jedną liczbę z pary można przedstawić przy pomocy jednej ręki (4), a drugą nie (6).

Istnieje szereg dowodów na to, że układy palców wykorzystywane podczas liczenia stanowią oddzielny rodzaj kodu, w jakim mogą być reprezentowane liczebności. Osoby badane szybciej nazywają liczbę palców na przedstawianych im schematach dłoni, jeżeli wielkości przedstawione są w sposób kanoniczny (tzn. w takim układzie jaki pojawiłyby się w czasie liczenia). Co więcej, podprogowa prezentacja układów palców przyspiesza porównywanie liczb w notacji cyfrowej, gdy pryma i bodziec docelowy wywoływały tę samą reakcję. Kanoniczne układy palców aktywują semantyczną reprezentację liczby (Di Luca, Pesenti, 2008). Z kolei jak pokazali Badets, Pesenti i Olivier (2010) w badaniu z wykorzystaniem metody poprzedzania, wyniki prostych operacji arytmetycznych są antycypowane jako kanoniczny układ palców. Co ważne, efektu nie uzyskano w przypadku układów niekanonicznych oraz wtedy, gdy pryma miała postać układu patyczków do liczenia. Na istnienie jakościowych różnic w przetwarzaniu kanonicznych i niekanonicznych układów palców wska-

zują również Di Luca, Lefèvre i Pesenti (2010). Te pierwsze prezentowane jako prymy wywoływały efekty zgodne z modelem miejscowej aktywacji osi liczbowej (obserwowano efekt dystansu numerycznego zarówno dla liczb mniejszych, jak i większych od prymy), które są charakterystyczne dla kodu werbalnego czy zapisu w postaci cyfr arabskich. W przypadku układów niekanonicznych prezentowanych jako prymy efekty poprzedzania były zgodne z modelem reprezentacji sumacyjnej (poprzedzana była liczba taka jak pryma i wszystkie mniejsze), który obserwowano wcześniej dla liczebności niewerbalnych. Wyniki te sugerują, że kanoniczne układy palców i ich reprezentacje umysłowe (nawet jeżeli są aktywowane wyłącznie kodem wzrokowym, gdy układ palców jest widziany na ekranie), różnią się w sposób jakościowy od innych form niewerbalnej reprezentacji liczebności i wykazują właściwości bardziej zbliżone do kodu symbolicznego.

Di Luca, Granà, Semenza, Seron i Pesenti (2006) przeprowadzili eksperyment, w którym osoby badane miały reagować na kolejne liczby z wykorzystaniem dziesięciu palców. Okazało się, że czasy reakcji były krótsze, jeśli przypisanie przycisków reakcyjnych do palców odpowiadało sposobowi liczenia na nich (czyli np. na liczbę 6 należało zareagować tym palcem, który jest liczony jako szósty) niż wtedy, gdy było ono zgodne z kierunkiem mentalnej osi liczbowej (czyli od lewej do prawej strony; nt. mentalnej osi liczbowej por. Cipora i Nęcka, 2012; Cipora, Szczygieł, 2013a, 2013b; Brożek, Hohol, 2013). Istnienie specyficznego kodu związanego z motoryką rąk, który – jako jeden z wielu potencjalnych – umożliwia reprezentowanie liczebności, dopuszcza model reprezentacji liczb Campbella (Wiese, 2003). Zgodnie z nim w przetwarzanie liczb zaangażowane są specyficzne reprezentacje zapisane w postaci różnych kodów (analogowego, fonologicznego), które są od siebie niezależne, choć mogą się wzajemnie aktywować (Campbell, Clark, 1992). Sprawnie działające przetwarzanie informacji w ramach różnorodnych kodów zwiększa rozumienie i efektywność przetwarzania liczb.

Z drugiej strony istnieją silne dowody na to, że liczenie na palcach nie może zastąpić kodu werbalnego. Gdy takowego brakuje, nie jest możliwe efektywne przeliczanie na palcach. W amazońskim plemienu Pirahã istnieją tylko słowa odpowiadające liczbom 1, 2 i „wiele”. Przedstawiciele tego plemienia, nawet wspomagając się liczeniem na palcach, popełniają bardzo dużo błędów podczas rachunków, również w przypadku zbiorów mniejszych niż 5-elementowe (Gordon, 2004). Konkluzję, zgodnie z którą liczenie na palcach nie działa bez kodu werbalnego, wspierają również wyniki badań prowadzonych wśród osób niesłyszących, posługujących się własnym językiem migowym (tzn. nie uczyły się go w szkole, tylko wypracowały własny system; *home signers*). Osoby takie, nawet jeśli liczą na palcach, to robią to w sposób bardzo niedokładny (Spaepen, Coppola, Spelke, Carey,

Goldin-Meadow, 2011). Co więcej, poza czynnikiem proprioceptywnym dla kształtowania się umiejętności liczenia na palcach duże znaczenie ma wzrokowe rozpoznawanie wzorców. Osoby niewidome bowiem niezbyt często stosują tę metodę, a gdy już to robią, nie korzystają z powtarzalnych układów palców (Crollen, Mahe, Collignon, Seron, 2011).

Jak pokazał Fischer (2008), sposób liczenia na palcach ma również związek z przestrzenną reprezentacją liczb. W przypadku osób, które rozpoczęły obliczenia od prawej ręki, zaobserwowano większe zróżnicowanie w zakresie efektu SNARC (zależności przestrzennej między liczbą a rodzajem odpowiedzi; Cipora, Nęcka, 2012).

WYKORZYSTANIE LICZENIA NA PALCACH PRZEZ OSOBY DOROSŁE

Liczenie na palcach wykorzystywane jest przez osoby dorosłe w wielu przypadkach, zwłaszcza gdy konieczne jest wymienianie elementów wydobywanych z pamięci długotrwałej (np. członków dalszej rodziny), jako strategia odciążenia pamięci roboczej. Wykorzystywane jest również często w czasie wykonywania obliczeń na kalendarzu (np. gdy odliczamy ile dni pozostało do początku urlopu). Zabieg ten poza odciążeniem pamięci roboczej umożliwia stałe kontrolowanie poprawności – w każdej chwili można sprawdzić, ile elementów zostało już policzonych (Butterworth, 1999). Jak jednak zaznaczają Beller i Bender (2008), zakres wykorzystania liczenia na palcach jest bardzo ograniczony – brakuje np. liczb ujemnych.

Poza prostymi metodami powstały bardziej złożone systemy liczenia na palcach. Niektóre pozwalają na przekroczenie ograniczeń związanych z liczbą palców, uwzględniając poszczególne paliczki i wprowadzając zasadę, że zgięcie poszczególnych stawów oznacza daną liczbę (Beller, Bender, 2011). Plemiona zamieszkujące wyżyny Nowej Gwinei posiadają znacznie bardziej rozbudowany system obrachunku z wykorzystaniem części ciała, przy pomocy którego można doliczyć do prawie 40 (Dehaene, 2011). W razie potrzeby można również wykorzystać części ciała drugiej osoby (Göbel, Shaki, Fischer, 2011). Wszystkie omówione systemy można określić jako jednowymiarowe, tzn. zachowana zostaje wzajemna jednoznaczna odpowiedniość między palcami (czy też ich częściami lub częściami ciała) a reprezentowanymi liczbami.

Istnieją także systemy wielowymiarowe, w których nie jest zachowana wzajemna jednoznaczna odpowiedniość. Przykładowo w systemie indyjskim (*indian merchant system*) palce jednej ręki odpowiadają jedności, a palce drugiej – pełnym piątkom. W tej metodzie pojawia się zatem alternatywny dla systemu dziesiętnego system piątkowy (Bender, Beller, 2011). Z kolei system rzymski, popularny w Europie jeszcze do XVII w., miał cha-

rakter symboliczny. Poszczególnym liczbom odpowiadały określone układy palców, przy jego pomocy można było reprezentować liczby do miliona. Swoistą hybrydę stanowi system chiński, w którym za pomocą jednej ręki można reprezentować liczby od 1 do 9. Dla liczb od 1 do 5 system ten ma charakter jednowymiarowy, natomiast dla liczb od 6 do 9 – symboliczny (Domahs i in., 2010). W Korei dzieci umieją reprezentować przy pomocy palców liczby z zakresu 1–19 (Göbel, Shaki, Fischer, 2011).

RÓŻNICE MIĘDZYKULTUROWE

Pomimo licznych dowodów świadczących, że liczenie na palcach jest powszechnym fenomenem i wywarło ogromny wpływ na rozwój matematyki, można zaobserwować duże różnice międzykulturowe (Bender, Beller, 2011). W tej części omówione zostaną jedynie odmienności w zakresie prostego rachunku na palcach (z zachowaniem wzajemnej jednoznacznej odpowiedniości) – systemy złożone, charakterystyczne dla poszczególnych kultur, zostały omówione w poprzedniej sekcji. Niektóre z przytoczonych rozbieżności można przypisać różnicom w zakresie kierunku czytania czy bardziej ogólnie – skanowania materiału wzrokowego (Lindemann, Rueschemeyer, Bekkering, 2009).

Zróżnicowanie wewnątrz- i międzykulturowe w zakresie liczenia na palcach można zaobserwować nawet w Europie Zachodniej, pomimo tego, że kierunek czytania jest we wszystkich jej krajach ten sam (od lewej do prawej). W badaniu przeprowadzonym na szkockiej próbie Fischer (2008) zaobserwował, że ok. 66% badanych osób rozpoczyna liczenie na palcach od lewej ręki. W internetowym badaniu Lindemanna, Alipoura i Fischera (2011), mającym na celu porównanie zwyczajów związanych z obliczaniem na palcach w różnych krajach, udział wzięło około 900 osób, które pochodziły głównie z Europy Zachodniej i Ameryki Północnej oraz Bliskiego Wschodu. W krajach zachodnich ok. 68% badanych rozpoczyna liczenie od kciuka lewej ręki (ta preferencja była jeszcze bardziej wyraźna wśród osób leworęcznych). Mimo tego zaobserwowano również spore zróżnicowanie, np. osoby badane z Włoch i Belgii nie wykazywały preferencji dla którejkolwiek ręki. W badaniach, w których wzięli udział francuskojęzyczni Belgowie, wszystkie osoby odpowiadały, że zaczynają liczenie od prawej ręki (Di Luca, Pesenti, 2008), podobne wyniki uzyskano u Włochów (Di Luca i in., 2006). W pozostałych krajach – USA, Wielkiej Brytanii, Kanadzie, Holandii, Finlandii, Niemczech – wykazano preferencję lewej ręki (Lindemann, Alipour, Fischer, 2011). W krajach Bliskiego Wschodu osoby badane najczęściej rozpoczynały liczenie od małego palca prawej ręki (prawie 64% rozpoczynało od prawej ręki). Po doliczeniu do 5 osoby badane najczęściej wykorzystują kontynuację anatomiczną, a nie przestrzenną (pal-

ce drugiej ręki są wykorzystywane w tej samej kolejności, np. liczbom 1 i 6 odpowiadają kciuki). Efekt ten zaobserwowano we wszystkich krajach biorących udział w badaniu i był on wyraźniejszy w państwach zachodnich. Z kolei Pika, Nicoladis i Marentette (2009) pokazali niewielkie zróżnicowanie w zakresie liczenia na palcach w grupie anglojęzycznych Kanadyjczyków i Niemców oraz spore zróżnicowanie wśród francuskojęzycznych Kanadyjczyków. Wyniki badania Lindemanna i współpracowników (2011) pokazują bardzo duże zróżnicowanie nawet w obrębie jednej kultury. Nie we wszystkich społecznościach zaobserwowano stabilność tego kierunku od dzieciństwa do dorosłości (Previtali, Rinaldi, Girelli, 2011).

Zaobserwowano także różnice w zakresie pokazywania liczb na palcach (*finger montring*). Pika i współpracownicy (2009) prosili badane osoby, aby liczyły na palcach w analogiczny sposób, jak gdy sprawdzają, ile dni zostało im do urlopu. Uczestników proszono również, by zaprezentowali, jak zamawialiby w głośnym barze określoną liczbę kufli piwa. W badaniu wzięli udział Kanadyjczycy (anglojęzyczni i francuskojęzyczni) oraz Niemcy. Spośród badanych grup tylko Niemcy używali palców do pokazywania liczb w ten sam sposób jak przy liczeniu, tzn. w obu przypadkach zaczynali od kciuka. Obie grupy Kanadyjczyków podczas pokazywania liczb nie rozpoczynały od kciuka, lecz od palca wskazującego.

Zróżnicowanie można zaobserwować również w samej technice liczenia na palcach – w większości kultur polega ono na prostowaniu kolejnych palców. Wyjątek stanowi Japonia, gdzie rozpoczyna się od otwartej dłoni i zgina palce (Butterworth, Reeve, Reynolds, 2011), co może świadczyć o tym, że praktyka ta jest w pewnej mierze kształtowana na drodze uczenia się przez obserwację (Crollen, Seron, Noël, 2011).

Warto jednak pamiętać, że istnieją kultury, w których liczenie na palcach nie występuje wcale. Butterworth i współpracownicy (2011) podają, że należą do nich np. australijscy Aborygeni. Są to jednak zarazem kultury, które w bardzo ograniczonym stopniu rozwinęły jakiegokolwiek systemy liczenia. Gallistel i Gelman (1986) wskazują, że w wielu językach afrykańskich brakuje słów określających liczby, do oznaczenia zaś konkretnych liczebności wykorzystywane są palce bądź układy rąk. Z drugiej strony jak wspomniano w poprzedniej części, istnieją dowody na to, że brak słownych etykiet nie może zostać w pełni zrekomensowany przez liczenie na palcach.

PODSUMOWANIE I KIERUNKI DAJSZYCH BADAŃ

Zdaniem Fischera i Bruggera (2011) poznanie matematyczne stanowi doskonały obszar, w którym możliwe jest testowanie założeń ucieleśnionego umysłu. Pojęcia matematyczne przez bardzo długi czas uważane były za czysto abstrakcyjne. Wyniki badań omówione w niniejszej pracy pokazu-

ją jednak, że do ukształtowania się tych pojęć zarówno w perspektywie filogenezy, jak i ontogenezy człowieka konieczne są operacje na materiale konkretnym. Zdaniem Butterwortha (1999) powiązanie abstrakcyjnych liczb z mentalną reprezentacją palców jest niezbędne do ukształtowania się rzeczywistej reprezentacji mózgowej liczb. Z drugiej strony spotkać można argumenty, że pojęcie liczby naturalnej jest zbyt abstrakcyjne, by mogło wyrastać z podstawowych procesów przetwarzania liczebności (Rips, Bloomfield, Asmuth, 2008). Zaproponowane przez Andresa i współpracowników (2008) wyjaśnienie, zgodnie z którym liczenie na palcach stanowiło ogniwo łączące procesy operowania na liczbach z dojrzałą matematyką, nie jest przez wszystkich autorów podzielane.

Duże znaczenie w przyszłych badaniach będzie miało wyjaśnienie indywidualnego zróżnicowania w liczeniu na palcach. Wydaje się bowiem, że dotychczasowe tłumaczenia, które odwołują się do kierunku czytania czy analizowania materiału wzrokowego, nie są wystarczające. Nie mogą one wyjaśnić, dlaczego nawet w krajach, w których wyniki były względnie jednorodne, ok. 30% osób badanych liczy na palcach w przeciwnym kierunku (przy kontrolowaniu ręczności). Odpowiedź na pytanie o to indywidualne zróżnicowanie mogą przynieść badania z wykorzystaniem technik neuroobrazowania. Jak wspomniano wyżej, wzorec aktywacji mózgu podczas kontaktu z liczbami jest związany z tym, od której ręki dana osoba rozpoczyna rachunki. Ponadto wyniki takich badań mogą doprowadzić do ważkich wniosków na temat wzajemnych związków między funkcjonalną organizacją mózgu a czynnikami kulturowymi, takimi jak kierunek.

Warto również pamiętać, że badanie preferencji w zakresie liczenia na palcach obarczone jest szeregiem trudności metodologicznych. Praktyka ta nie jest czynnością wymagającą motorycznie i może być rozpoczynane przy pomocy ręki, która aktualnie jest wolna. Najprawdopodobniej liczenie na palcach przy pomocy niepreferowanej ręki nie wiąże się z dyskomfortem i nie zawsze osoba zaczynająca od ręki lewej przełoży trzymany w niej przedmiot do prawej, aby obliczyć coś na palcach. Brakuje badań pokazujących, z jak dużą niewygodą wiąże się konieczność liczenia na palcach niezgodnie ze zwyczajem. Brak również danych na temat stałości tej preferencji w czasie.

Jak pokazują wyniki badań przytoczone w niniejszej pracy, liczenie na palcach nie powinno być traktowane jako stadium rozwojowe, które zanika stosunkowo wcześnie, ale jako bardzo istotny element poznania matematycznego. Pomimo różnych kontrowersji stanowi ono bardzo silny dowód na rzecz dużego znaczenia ucieleśnienia w poznaniu matematycznym.

LITERATURA CYTOWANA

- Andres, M., Di Luca, S., Pesenti, M. (2008). Finger counting: The missing tool? *Behavioral and Brain Sciences*, 31 (6), 642–643.
- Andres, M., Seron, X., Olivier, E. (2007). Contribution of hand motor circuits to counting. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19 (4), 563–576.
- Badets, A., Pesenti, M., Olivier, E. (2010). Response–effect compatibility of finger–numeral configurations in arithmetical context. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 63 (1), 16–22.
- Beller, S., Bender, A. (2008). The limits of counting: Numerical cognition between evolution and culture. *Science*, 319, 213–215.
- Beller, S., Bender, A. (2011). Explicating numerical information: When and how fingers support (or hinder) number comprehension and handling. *Frontiers in psychology*, 2, 7–9.
- Bender, A., Beller, S. (2011). Fingers as a tool for counting–naturally fixed or culturally flexible? *Frontiers in psychology*, 2, 10–12.
- Brożek, B., Hohol, M. (2013). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.
- Brybaert, M. (2005). Number recognition in different formats. W: J. I. D. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 23–42). New York: Psychology Press.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. London: Macmillan.
- Butterworth, B., Reeve, R., Reynolds, F. (2011). Using mental representations of space when words are unavailable: Studies of enumeration and arithmetic in indigenous Australia. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42 (4), 630–638.
- Campbell, J. I. D., Clark, J. M. (1992). Cognitive number processing: An encoding–complex perspective. *Advances in Psychology*, 91, 457–491.
- Cipora, K., Nęcka, E. (2012). Kontinua a przestrzeń – przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia. *Psychologia–Etologia–Genetyka*, 26, 7–21.
- Cipora, K., Szczygieł, M. (2013a). Wyścig Liczb – The Number Race – polska wersja językowa narzędzia wczesnej interwencji w przypadku ryzyka dyskalkulii rozwojowej oraz wspomaganie rozwoju kompetencji arytmetycznych. *Psychologia–Etologia–Genetyka*, 27, 71–85.
- Cipora, K., Szczygieł, M. (2013b). Gry planszowe jako narzędzie wspomaganie rozwoju wczesnych kompetencji matematycznych. *Edukacja. Studia, Badania, Innowacje*, 3, 60–75.
- Costa, A. J., Silva, J. B. L., Chagas, P. P., Krinzinger, H., Lonneman, J., Willmes, K., Wood, G., Haase, V. G. (2011). A hand full of numbers: A role for offloading in arithmetics learning? *Frontiers in Psychology*, 2, 13–24.
- Crollen, V., Mahe, R., Collignon, O., Seron, X. (2011). The role of vision in the development of finger–number interactions: Finger-counting and finger-montring in blind children. *Journal of experimental child psychology*, 109 (4), 525–539.
- Crollen, V., Seron, X., Noël, M. P. (2011). Is finger-counting necessary for the development of arithmetic abilities? *Frontiers in Psychology*, 2, 25–27.
- Darby, D., Walsh, K. (2008). *Neuropsychologia kliniczna Walsha*, przeł. B. Mroziak. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

- Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Di Luca, S., Granà, A., Semenza, C., Seron, X., Pesenti, M. (2006). Finger–digit compatibility in Arabic numeral processing. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 59 (9), 1648–1663.
- Di Luca, S., Lefèvre, N., Pesenti, M. (2010). Place and summation coding for canonical and non-canonical finger numeral representations. *Cognition*, 117 (1), 95–100.
- Di Luca, S., Pesenti, M. (2008). Masked priming effect with canonical finger numeral configurations. *Experimental Brain Research*, 185 (1), 27–39.
- Di Luca, S., Pesenti, M. (2011). Finger numeral representations: More than just another symbolic code. *Frontiers in Psychology*, 2, 28–30.
- Domahs, F., Kaufmann, L., Fischer, M. H. (2012). Handy numbers: Finger counting and numerical cognition (introduction). *Frontiers in Psychology*, 2, 2–3.
- Domahs, F., Krinzinger, H., Willmes, K. (2008). Mind the gap between both hands: Evidence for internal finger-based number representations in children’s mental calculation. *Cortex*, 44 (4), 359–367.
- Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K., Nuerk, H. C. (2010). Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition*, 116 (2), 251–266.
- Fayol, M., Seron, X. (2005). About numerical representations: Insights from neuropsychological, experimental, and developmental studies. W: J. I. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 3–22). New York: Psychology Press.
- Fischer, M. H. (2008). Finger counting habits modulate spatial-numerical associations. *Cortex*, 44 (4), 386–392.
- Fischer, M. H., Brugger, P. (2011). When digits help digits: Spatial–numerical associations point to finger counting as prime example of embodied cognition. *Frontiers in Psychology*, 2, 41–47.
- Gelman, R., Gallistel, C. (1986). *The child’s understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science*, 306, 496–499.
- Göbel, S. M., Shaki, S., Fischer, M. H. (2011). The cultural number line: A review of cultural and linguistic influences on the development of number processing. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42 (4), 543–565.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2012). Dodawanie i odejmowanie w możliwie szerokim zakresie: od poziomu konkretów, przez zbiory zastępcze aż do rachowania w pamięci. Stosowanie tych umiejętności w układaniu i rozwiązywaniu prostych zadań z treścią. W: E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.), *O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli* (s. 167–186). Warszawa: Nowa Era.
- Gruszczyk-Kolczyńska, E., Zielińska, E. (2009). Kształtowanie umiejętności dodawania i odejmowania od poziomu manipulacji przedmiotami, przez liczenie na zbiorach zastępczych do rachowania w pamięci. W: E. Gruszczyk-Kolczyńska (red.), *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkolnej edukacji* (s. 135–165). Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska.

- Imbo, I., Vandierendonck, A., Fias, W. (2011). Passive hand movements disrupt adults' counting strategies. *Frontiers in Psychology*, 2, 48–52.
- Kaufmann, L. (2002). More evidence for the role of the central executive in retrieving arithmetic facts – a case study of severe developmental dyscalculia. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, 24 (3), 302–310.
- Klein, E., Moeller, K., Willmes, K., Nuerk, H. C., Domahs, F. (2011). The influence of implicit hand-based representations on mental arithmetic. *Frontiers in Psychology*, 2, 68–74.
- Lindemann, O., Rueschemeyer, S. A., Bekkering, H. (2009). Symbols in numbers: From numerals to magnitude information. Commentary. *Behavioural and Brain Sciences*, 32 (3–4), 341–342.
- Lindemann, O., Alipour, A., Fischer, M. H. (2011). Finger counting habits in middle eastern and western individuals: An online survey. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42 (4), 566–578.
- Penner-Wilger, M., Anderson, M. L. (2008). An alternative view of the relation between finger gnosis and math ability: Redeployment of finger representations for the representation of number. W: *Proceedings of the 30th annual meeting of the Cognitive Science Society* (s. 1647–1652). Austin, TX: Cognitive Science Society.
- Pesenti, M. (2005). Calculation abilities in expert calculators. W: J. I. D. Campbell (red.), *Handbook of mathematical cognition* (s. 413–430). New York: Psychology Press.
- Pika, S., Nicoladis, E., Marentette, P. (2009). How to order a beer: Cultural differences in the use of conventional gestures for numbers. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 40 (1), 70–80.
- Previtali, P., Rinaldi, L., Girelli, L. (2011). Nature or nurture in finger counting: A review on the determinants of the direction of number–finger mapping. *Frontiers in Psychology*, 2, 80–84.
- Rips, L. J., Bloomfield, A., Asmuth, J. (2008). From numerical concepts to concepts of number. *Behavioral and Brain Sciences*, 31 (6), 623–642.
- Rizzolatti, G., Riggio, L., Dascola, I., Umilta, C. (1987). Reorienting attention across the horizontal and vertical meridians: Evidence for a premotor theory of attention. *Neuropsychologia*, 25, 31–40.
- Roux, F. E., Boetto, S., Sacko, O., Chollet, F., Trémoulet, M. (2003). Writing, calculating, and finger recognition in the region of the angular gyrus: A cortical stimulation study of Gerstmann syndrome. *Journal of Neurosurgery*, 99 (4), 716–727.
- Rusconi, E., Pinel, P., Dehaene, S., Kleinschmidt, A. (2010). The enigma of Gerstmann's syndrome revisited: A telling tale of the vicissitudes of neuropsychology. *Brain*, 133 (2), 320–332.
- Rusconi, E., Walsh, V., Butterworth, B. (2005). Dexterity with numbers: rTMS over left angular gyrus disrupts finger gnosis and number processing. *Neuropsychologia*, 43 (11), 1609–1624.
- Sato, M., Cattaneo, L., Rizzolatti, G., Gallese, V. (2007). Numbers within our hands: Modulation of corticospinal excitability of hand muscles during numerical judgment. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19 (4), 684–693.

- Spaepen, E., Coppola, M., Spelke, E. S., Carey, S. E., Goldin-Meadow, S. (2011). Number without a language model. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108 (8), 3163–3168.
- Szczygieł, M., Cipora, K., Hohol, M. (w przygotowaniu). Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych.
- Tschemtscher, N., Hauk, O., Fischer, M. H., Pulvermüller, F. (2012). You can count on the motor cortex: Finger counting habits modulate motor cortex activation evoked by numbers. *Neuroimage*, 59 (4), 3139–3148.
- Ward, J., Sagiv, N. (2007). Synaesthesia for finger counting and dice patterns: A case of higher synaesthesia? *Neurocase*, 13 (2), 86–93.
- Wiese, H. (2003). *Numbers, language and human mind*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Zago, L., Pesenti, M., Mellet, E., Crivello, F., Mazoyer, B., Tzourio-Mazoyer, N. (2001). Neural correlates of simple and complex mental calculation. *Neuroimage*, 13 (2), 314–327.